Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika

Diferencijalna geometrija

(akademska 2012/2013.)

2. dio

Literatura za dodatno usavršavanje i napredovanje:
• Diferencijalna geometrija (zbirka zadataka i repetitorij); Branka Žarinac-Frančula
• Zbirka riješenih zadatak iz Matematike II; Perić, Tomić; Karačić.
• Zbirka riješenih zadatak iz Matematike; Ferenci; Ungar; Čomić; Cvjetanović; Uzelac.
• http://www.frontslobode.org/vedad/DifGeo/index.html

Dio tablice izvoda

1) $(c)' = 0;$
2) $(u + v - w)' = u' + v' - w';$
3) $(uv)' = u'v + v'u;$
3a) $(cu)' = cu';$
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$
4a) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$
4б) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2};$
5) $(x^n)' = nx^{n-1};$
6) $(\sin x)' = \cos x;$
7) $(\cos x)' = -\sin x;$
8) $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x;$
9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$

5) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';$
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
8) $(\operatorname{tg} u)' = \sec^2 u \cdot u';$
9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'.$

10) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$
11) $(\log u)' = \frac{u'}{u} \log e;$
10a) $(e^u)' = e^u u';$
11a) $(\ln u)' = \frac{u'}{u};$
10б) $(a^x)' = a^x \ln a;$
11б) $(\log x)' = \frac{1}{x} \log e;$
10в) $(e^x)' = e^x;$
11в) $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

12) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
12a) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
13) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
13a) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
14) $(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$
14a) $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
15) $(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2};$
15a) $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Dio tablice integrala

1. $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1.$
2. $\int u^{-1}\,du = \int \frac{du}{u} = \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad \int e^u\,du = e^u + C.$
4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$
5. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$
6. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C.$
7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C.$
8. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C.$
9. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a}\right| + C.$

Dio teorije

§ 7. Tangentna ravnina i normala

7.1. Definicija

a) Ako u danoj točki M plohe povučemo na plohi sve moguće krivulje, onda tangente na te krivulje u točki M leže u jednoj ravnini koja se zove *tangentna (ili tangencijalna) ravnina* na plohu u točki M (vidi sl. 43). (Izuzetak su singularne točke plohe.) Tangencijalna ravnina određena je vektorima:

$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\vec{k}$$

koji diraju u-krivulje i v-krivulje u točki M.

Vektor tangente krivulje $\alpha : I \to S$ na plohi dane prikazom $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$, $\forall t \in I$, dan je izrazom:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

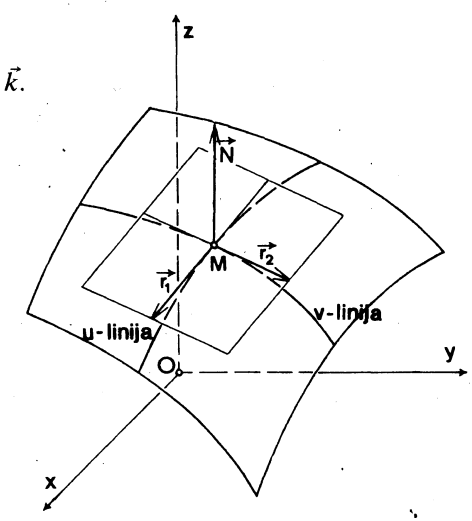
Pravac koji prolazi točkom M okomito na tangentnu ravninu zove se *normala* na plohu u točki M. Vektor paralelan normali ima jednadžbu:

$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, odnosno:

$$\vec{N} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,\vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\,\vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\vec{k}.$$

Jedinični vektor normale glasi:

$$\vec{N}^0 = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$



Sl. 43.

b) *Regularne i singularne točke plohe. Singularne točke koordinatne (parametarske) mreže.* Točke plohe u kojima egzistira jedna jednoznačno definirana tangencijalna ravnina zovu se *regularne točke plohe* i za njih vrijedi uvjet (6) iz § 6, tj.

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$$

barem za jednu parametrizaciju.

Tada vektori $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ određuju tangencijalnu ravninu i nisu kolinearni. Zbog toga što je uvjet (6) uvijek ispunjen sve točke plohe jesu regularne. *Singularne točke plohe* su one u kojima nije definirana tangencijalna ravnina i za koje vrijedi:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0},$$

za svaku parametrizaciju u kojoj su $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ definirani, ako takva parametrizacija uopće postoji.

Singularne točke koordinatne ili parametarske mreže.

Uslov:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$$

može izražavati i singularnost parametarske mreže plohe. Naime, on može biti ispunjen u *pojedinim točkama* plohe a da te točke ipak ne budu singularne točke plohe. *Takve točke zovu se tada singularne točke parametarske ili koordinatne mreže.*

Naprimjer polovi kugle ili rotacionog elipsoida su singularne točke koordinatne mreže, u njima se sastaju svi meridijani. Međutim, navedene plohe imaju i u tim točkama potpuno definiranu jednu jedinu tangencijalnu ravninu (vidi zad. 266. 2°, a zatim zad. 272. i 323).

7.2. Jednadžba tangentne ravnine

Tablica 4.

Zadana ploha ima jednadžbu	Tangentna ravnina
$F(x, y, z) = c$	$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0$
$z = f(x, y)$	$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$
$x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix} = 0$ ili: $\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)_0}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)_0}\right)(y - y_0) + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)_0}\right)(z - z_0) = 0$
$\vec{r}(u,v) = x(u, v)\,\vec{i} +$ $+ y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}$	$(\vec{\varrho} - \vec{r}_0) \cdot \left(\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)_0 \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)_0\right) = 0$ ili: $(\vec{\varrho} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N}_0 = 0$

7.3. Jednadžba normale

Tablica 5.

Zadana ploha	Normala
$F(x, y, z)=c$	$\dfrac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_0}=\dfrac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0}=\dfrac{z-z_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_0}$
$z=f(x, y)$	$\dfrac{x-x_0}{p_0}=\dfrac{y-y_0}{q_0}=\dfrac{z-z_0}{-1}$
$x=x(u, v)$ $y=y(u, v)$ $z=z(u, v)$	$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)_0\\ \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)_0\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_0\\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)_0\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)_0\\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)_0\end{vmatrix}}$ ili $\dfrac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)_0}=\dfrac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)_0}=\dfrac{z-z_0}{\left(\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)_0}$
$\vec{r}(u, v)=x(u, v)\,\vec{i}+$ $+y(u, v)\,\vec{j}+z(u, v)\,\vec{k}$	$\vec{\varrho}=\vec{r}_0+\lambda\left(\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)_0\times\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)_0\right)$ ili $\vec{\varrho}=\vec{r}_0+\lambda\vec{N}_0$

U tablicama 4. i 5. su x_0, y_0, z_0 i $\vec{r}_0$ koordinate i radijvektor točke M plohe S, a x, y, z i $\vec{\varrho}$ koordinate i radijvektor točke u tangencijalnoj ravnini odnosno normali. Derivacije se računaju u točki M $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}=p,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=q\right)$.

Napomena:

U daljnjem tekstu pojavljivat će se parcijalne derivacije, kao npr.:

$$\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v},\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2},$$

i druge.

Te ćemo parcijalne derivacije ponekad kraće obilježiti ovako:

x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$, i druge.

Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcije "Tangentna ravan i normala na površ")

245. Naći tangencijalnu ravninu i normalu plohe (helikoida):

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av,\quad u,v\in\mathbf{R}$$

u proizvoljnoj točki M plohe.

Vektorska jednadžba zadane plohe glasi:

$$\vec{r}=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+a v\,\vec{k}.$$

Tada je:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}=$$

$$=a\sin v\,\vec{i}-a\cos v\,\vec{j}+u\,\vec{k}.$$

Koristimo li vektorsku jednadžbu tangentne ravnine i normale koja odgovara zadanoj plohi (vidi tablice 4. i 5) tada je:

tangencijalna ravnina:

$a\sin v\,(X-u\cos v)-a\cos v\,(Y-u\sin v)+u(Z-a v)=0$, odnosno:

$$a\sin v\ X-a\cos v\ Y+u\ Z-auv=0,$$

normala:

$$\frac{X-u\cos v}{a\sin v}=\frac{Y-u\sin v}{-a\cos v}=\frac{Z-av}{u}.$$

246. Na plohi $xyz=1$ naći tangentnu ravninu paralelnu s ravninom $2x+y-3z+5=0$.

Prvi način (vektorski):

Želimo li napisati vektorsku jednadžbu plohe, tada ona glasi (vidi zad. 214):

$$\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+\frac{1}{xy}\,\vec{k}.$$

Moramo naći točku na plohi (dиralište) u kojoj je tangentna ravnina paralelna sa zadanom ravninom, tj. u kojoj su pripadni vektori normala paralelni ($\vec{N}_T$ i $\vec{N}_R$).

Kako je: $\quad \vec{N}_T=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2y}\,\vec{i}+\dfrac{1}{xy^2}\,\vec{j}+\vec{k},$

tada mora biti:

$$\vec{N}_T\left(\frac{1}{x^2y}, \frac{1}{xy^2}, 1\right) \text{ paralelan s } \vec{N}_R\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Odavde dobijemo usporedivši koordinate gornjih vektora:

$$\frac{1}{x^2y} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{xy^2} = -\frac{1}{3},$$

koordinate tražene točke:

$$D = \left(-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}, -2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right).$$

Jednadžba pripadne tangentne ravnine glasi:

$$\frac{1}{x^2y}(X-x) + \frac{1}{xy^2}(Y-y) + (Z-z) = 0,$$

odnosno:

$$\frac{z}{x}(X-x) + \frac{z}{y}(Y-y) + xyz(Z-z) = 0,$$

odnosno u točki D:

$$2x + y - 3z + 6\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0.$$

Drugi način (skalarni).

Točku u kojoj postavljamo tangentnu ravninu naći ćemo ovako:

a) Ako plohu predočimo parametarskim jednadžbama:

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \frac{1}{xy},$$

tada vektori:

$$\vec{N}_T\left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\right)$$

i

$$\vec{N}_R(2, 1, -3)$$

moraju biti paralelni (kolinearni).

b) Ako plohu napišemo pomoću implicitne jednadžbe $F(x, y, z) = c : xyz = 1$, tada vektori:

$$\vec{N}_T\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \vec{N}(yz, xz, xy)$$

i

$$\vec{N}_R(2, 1, -3)$$

moraju biti paralelni (kolinearni).

Iz uvjeta kolinearnosti tih dvaju vektora dobije se točka (diralište), npr.:

$$\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(x, y)} = 2k, \quad \frac{\partial(Z, X)}{\partial(x, y)} = k, \quad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = -3k,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{x^2y} \\ 1 & -\frac{1}{xy^2} \end{vmatrix} = 2k, \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2y} & 1 \\ -\frac{1}{xy^2} & 0 \end{vmatrix} = k, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3k$$

odakle se dobiju isti uvjeti za točku D kao na prvi način.

247. Zadana je ploha S parametrizacijom:

$$x = v\cos u - \phi(u)\cos u + \phi'(u)\sin u$$

$$y = v\sin u - \phi(u)\sin u - \phi'(u)\cos u$$

$$z = \sqrt{2v},$$

$$u \in [-\pi, \pi], \qquad v \geqslant 0.$$

Naći projekciju dužine normale od točke plohe do točke u kojoj normala siječe ravninu XOY.

Radimo skalarno, pa računajmo Jakobijane:

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v\cos u - \phi'\sin u - \phi\cos u - \phi''\cos u + \phi'\sin u & 0 \\ \sin u & \frac{1}{\sqrt{2v}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\cos u}{\sqrt{2v}}(-v + \phi + \phi'').$$

Na sličan način je:

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \frac{\sin u}{\sqrt{2v}}(-v + \phi + \phi'')$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -v + \phi + \phi''.$$

Jednadžba normale tada glasi:

$$\frac{X - v\cos u + \phi\cos u - \phi'\sin u}{-\frac{\cos u}{\sqrt{2v}}(-v+\phi+\phi'')} = \frac{Y - v\sin u + \phi\sin u + \phi'\cos u}{\frac{\sin u}{\sqrt{2v}}(-v+\phi+\phi'')} =$$

$$= \frac{Z - \sqrt{2v}}{-v+\phi+\phi''},$$

odnosno kraće:

$$\frac{X-x}{-\cos u} = \frac{Y-y}{\sin u} = \frac{Z-z}{\sqrt{2v}} = t.$$

Da bismo našli probodište P_1 normale s ravninom XOY, moramo jednadžbu normale napisati u parametarskom obliku:

$$X = x - t\cos u$$

$$Y = y + t\sin u$$

$$Z = z - \sqrt{2v}\,t$$

i naći takav parametar t, da bude $Z=0$.

Tada je $z + \sqrt{2v}\,t = 0$, odnosno $\sqrt{2v} + \sqrt{2v}\,t = 0$, $t = -1$, pa su koordinate točke $P_1 = (x + \cos u,\ y - \sin u,\ 0)$.

Projekcija točke T na plohi je točka $P_2 = (x, y, 0)$.

Tada je tražena projekcija dužine normale dužina $\overline{P_1P_2}$, pa je $\overline{P_1P_2}^2 = (x - x - \cos u)^2 + (y - y + \sin u)^2 = 1$, dakle $\overline{P_1P_2} = 1$.

248. Naći tangentnu ravninu na plohu:

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

u točki $M = (3, 5, 9)$.

249. Napisati jednadžbu tangentne ravnine na plohu:

$$x = 2u - v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 - v^3, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

u točki $M = (3, 5, 7)$.

250. Napisati jednadžbu tangentne ravnine i normale na plohu:

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

u točki $M(u=2,\ v=1)$.

251. Naći tangentnu ravninu i normalu u točki $M = (1, 3, 4)$ plohe:

$$x = u, \quad y = u^2 - 2v, \quad z = u^3 - 3uv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

252. Zadana je ploha (kružni stožac $S \setminus \{V\}$):

$$\vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ au\}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

a) napisati jednadžbu tangentne ravnine i normale u proizvoljnoj točki (u_0, v_0);

b) napisati jednadžbu tangentne ravnine, normale i tangente na krivulju $u = 2$ u točki $\left(u = 2,\ v = \frac{\pi}{4}\right)$.

253. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \{u + \cos v,\ u - \sin v,\ \lambda u\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

i njena točka $M\left(u = 1,\ v = \frac{\pi}{2}\right)$.

a) napisati jednadžbu normale ravnine i tangente na krivulje $u = 1$, $v = \frac{\pi}{2}$ u točki M;

b) naći kut između krivulja $u = 1$, $v = \frac{\pi}{2}$;

c) pokazati da tangenta u točki M na krivulju $u = \sin v$ jest ujedno i tangenta na krivulju $u = 1$ u toj istoj točki.

254. Na plohi:

$$\vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ 2\ln u\}, \quad u \geqslant 0, \quad v \in \mathbf{R},$$

zadana je krivulja $\alpha: I \to \mathbf{R}: u = e^v$. Napisati jednadžbu plohe u obliku $F(x, y, z) = c$, te pokazati da je u svakoj točki krivulje tangentna ravnina plohe ujedno i oskulaciona ravnina zadane krivulje.

255. Kako glase jednadžbe tangentnih ravnina plohe:

$$\vec{r} = \{u,\ u + v,\ u^2 + v^2\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

koje prolaze pravcem $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{10}$?

256. Ploha $xyz = a^2$ u proizvoljnoj točki (x_0, y_0, z_0)

ima tangentnu ravninu: $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3$

i normalu: $\frac{x - x_0}{y_0 z_0} = \frac{y - y_0}{x_0 z_0} = \frac{z - z_0}{x_0 y_0}$. Dokazati.

257. Naći vektorsku i skalarnu jednadžbu tangentne ravnine kružnog valjka:

$$\vec{r} = \{R\cos v,\ R\sin v,\ u\}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

U zadacima od 258. do 260. napisati jednadžbe tangentnih ravnina i normala sljedećih ploha u danim točkama:

258. $z = x^3 + y^3$ u točki $M = (1, 2, 9)$.

259. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ u točki $M = (3, 4, 12)$.

260. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ u točki $M = (3, 1, -1)$.

261. Napisati jednadžbu tangentne ravnine na pseudosferu:

$$x = a\sin u\cos v, \quad y = a\sin u\sin v,$$

$$z = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right), \quad u \geqslant 0, \quad v \in [0, 2\pi].$$

262. Napisati jednadžbu tangentne ravnine na torus:

$$x = (1 + 5\cos u)\cos v, \qquad y = (1 + 5\cos u)\sin v$$
$$z = 5\sin u, \qquad u,\ v \in [0, 2\pi],$$

u točki $M(u, v)$ za koju je $\cos u = \dfrac{3}{5}$,

$$\cos v = \frac{4}{5}, \quad \left(u > 0, \quad v < \frac{\pi}{2}\right).$$

263. Iz točke M na plohi:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z^2 = -r^2 + f(r\mathrm{e}^{\phi}), \quad r, \phi \in \mathbf{R},$$

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ realna funkcija, povući normalu MN do točke N, koja je probodište normale s ravninom XOY.
Naći kut između pravca ON i pravca OP, gdje je P projekcija točke M na ravninu XOY.

264. Dana je ploha $S : \vec{r} = \left\{u, v, k \operatorname{arctg}\dfrac{v}{u}\right\}$, $u, \ v \in \mathbf{R}$, i krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to S : r = \{a\cos u, a\sin u, g(u)\}$, $k, a > 0$, $g(u)$ je realna funkcija. Odrediti $g(u)$ tako da krivulja leži na danoj plohi, a zatim pokazati da se tangentna ravnina plohe i oskulaciona ravnina krivulje u svim točkama poklapaju.

265. Dana je ploha $S : \vec{r} = \{v\cos u, \ v\sin u, \ v\sqrt{2}\}$, $u, v \in \mathbf{R}$.

a) Naći v kao funkciju od u za one krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to S$ na plohi S kod kojih tangente zatvaraju s osi OZ kut od $\dfrac{\pi}{4}$.

b) Naći onu od tih krivulja koja prolazi točkom $(1, 0, \sqrt{2})$.

Rješenja

248. $12x - 9y + 2z - 9 = 0.$ **249.** $18x + 3y - 4z - 41 = 0.$

250. $3x - y - 2z - 4 = 0, \quad \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-2}.$

251. $6x + 3y - 2z - 7 = 0, \quad \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-4}{-2}.$

252. a) $ax\cos v_0 + ay\sin v_0 - z = 0$;

$$\frac{x - x_0}{\cos v_0} = \frac{y - y_0}{\sin v_0} = -a(z - z_0);$$

b) $x + y - \dfrac{\sqrt{2}}{a} z = 0; \quad \dfrac{x - \sqrt{2}}{1} = \dfrac{y - \sqrt{2}}{1} = \dfrac{a(z - 2a)}{-\sqrt{2}}$;

i tangenta na krivulju $u = 2$:

$$\frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - 2a}{0}.$$

253. a) na krivulju $u = 1$:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z - \lambda}{0}, \qquad (x - 1) = 0:$$

na krivulju $v = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-\lambda}{\lambda}, \qquad (x-1) + y + \lambda(z - \lambda) = 0;$$

b) $\cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2 + \lambda^2}}.$ **254.** $x^2 + y^2 = e^z; \qquad 2\cos v x + 2\sin v y - uz - 2u(1 - \ln u) = 0.$

255. $x + 2y - z - 7 = 0.$

257. $x\cos v + y\sin v - a = 0, \qquad \vec{r}\cdot\vec{e}(v) - a = 0,$
ako uzmemo: $\vec{r} = x i + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{e}(\mathrm{v}) = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j}.$

258. $3x + 12y - z - 18 = 0; \quad \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{12} = \dfrac{z-9}{-1}.$

259. $3x + 4y + 12z - 169 = 0; \quad \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-12}{12}.$

260. $3x - 2y + 3z - 4 = 0; \quad \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{3}.$

261. $x\cos u\cos v + y\cos u\sin v - z\sin u + a\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\sin u = 0.$

262. $12x + 9y + 20z - 140 = 0.$

263. Koordinate točke N su: $x = e^{\phi}\dot{f}(\cos\phi - \sin\phi)$, $y = \dfrac{1}{2}e^{\phi}\dot{f}(\cos\phi + \sin\phi)$; $\alpha = 45°.$

264. $g(u) = ku$; tangentna ravnina:

$kvX - kuY + (u^2 + v^2)\,Z - k(u^2 + v^2)\operatorname{arctg}\dfrac{v}{u} = 0$ i

oskulaciona ravnina: $k\sin uX - k\cos uY + aZ - kau = 0$

u zajedničkim točkama, tj. za $u = a\cos u$, $v = a\sin u$ se poklapaju.

265. a) $v = e^{c \pm u}; \quad \vec{r} = \{e^{\pm u}\cos u, \quad e^{\mp u}\sin u, \quad \sqrt{2}e^{\pm u}\}.$

Obvojna površ

Obvojna površ (obvojnica ili anvelopa) familije površi u prostoru je površ koja u svakoj svojoj tački dodiruje bar jednu površ familije.

Ako familija površi $f(x, y, z, a) = 0$ ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi $F(x, y, z) = 0$ koja se dobija eliminacijom parametra a iz jednačina

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0 .$$

Ako dvoparametarska površ $f(x, y, z, a, b) = 0$ ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu $F(x, y, z) = 0$ koja se dobija eliminacijom parametara a i b iz jednačina

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke

(#) Naći obvojnu površ familije sferi

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 .$$

Rj.

Ako familija površi $f(x, y, z, a) = 0$ ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi $F(x, y, z) = 0$ koja se dobija eliminacijom parametra a iz jednačina

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

$$f(x, y, z, a) = (x-a)^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2(x-a)(-1) = -2x + 2a$$

$$\begin{array}{c} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ -2x + 2a = 0 \\ \hline (x-a)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ -2(x-a) = 0 \\ \hline y^2 + z^2 = 1 \end{array}$$

Jednačina obvojne površi je

$$y^2 + z^2 = 1$$

kružni cilindar čije su izvodnice paralelne x osi.

Naći obvojnu površ familije sferi

$$(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2=s^2a^2$$

gdje je a parametar.

Rj.

$$f(x,y,z,a)=(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2-s^2a^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2p(x-pa)-2q(y-qa)-2r(z-ra)-2s^2a$$

$$(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2=s^2a^2 \qquad \ldots(1)$$

$$p(x-pa)+q(y-qa)+r(z-ra)=-s^2a \qquad \ldots(2)$$

$$(2) \Rightarrow \quad px+qy+rz-p^2a-q^2a-r^2a=-s^2a$$

$$px+qy+rz=(p^2+q^2+r^2-s^2)a$$

$$\text{odakle je} \quad a=\frac{px+qy+rz}{p^2+q^2+r^2-s^2}$$

Ako uvedemo smjene $px+qy+rz=\alpha$

$p^2+q^2+r^2-s^2=\beta \quad (\beta\neq 0)$

tada je $a=\frac{\alpha}{\beta}$, i zamjenjujući ovu vrijednost od a u (1) dobijamo jednačinu obvojne površi

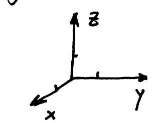
$$\left(x-p\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(y-q\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(z-r\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=s^2\frac{\alpha^2}{\beta^2} \qquad /\cdot\beta^2$$

$$(\beta x-p\alpha)^2+(\beta y-q\alpha)^2+(\beta z-r\alpha)^2=s^2\alpha^2$$

Naći obvojnu površ ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2},0,0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1.

Rj.

Prvo želimo pronaći familiju ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2},0,0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1. Nijedna ravan iz te familije nije paralelna x-osi



$$A(x-\sqrt{2})+By+Cz=0$$

$\vec{n}=(A,B,C)$

Kako nijedna ravan nije paralelna sa x-osom to $A\neq 0$, pa možemo uzeti da je vrijednost od $A=1$.

$$x+By+Cz=\sqrt{2}$$

Udaljenost ravni $Ax+By+Cz+D=0$ od tačke (x_1,y_1,z_1) se računa po formuli

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+B^2+C^2}}=1$$

u našem slučaju rastojanje ravni od koordinatnog početka je uvijek jedan,

$$\Rightarrow \sqrt{1+B^2+C^2}=\sqrt{2}$$

$$1+B^2+C^2=2$$

$$B^2=1-C^2$$

$$B=\pm\sqrt{1-C^2},$$

$$|C|<1.$$

Ako vratimo dobijenu vrijednost za B u gornju jednakost dobijemo konačni oblik jednačine ravni koje zadovoljavaju uslov zadatka (sa parametrom C)

$$x\pm\sqrt{1-C^2}\,y+z=0, \quad |C|<1$$

Pronađimo obvojnu površ za dobijenu familiju ravni:

$$x \pm \sqrt{1-c^2}\,y + cz = \sqrt{2} \quad \dots (*)$$

izvod po c-u:
$$\frac{-c}{\pm\sqrt{1-c^2}}y + z = 0 \iff -cy \pm \sqrt{1-c^2}\,z = 0$$

$$\iff \pm\sqrt{1-c^2}\,z = cy \iff (1-c^2)z^2 = c^2y^2$$

$$\iff c^2(y^2+z^2) = z^2$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pm z}{\sqrt{y^2+z^2}} \wedge c^2 = \frac{z^2}{y^2+z^2}$$

$$\sqrt{1-c^2} = \sqrt{\frac{y^2+z^2-z^2}{y^2+z^2}} = \frac{\pm y}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \dots (**)$$

Iz (*) i (**) dobijamo jednačinu obvojne površi

$$x \pm \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot y \pm \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot z = \sqrt{2}$$

$$x \pm \frac{y^2+z^2}{\sqrt{y^2+z^2}} = \sqrt{2} \iff (x-\sqrt{2})^2 = y^2+z^2$$

ovo je jednačina konusa čije je tjeme u tački $(\sqrt{2},0,0)$ a osa simetrije joj je x-osa.

Naći obvojnu površ familije elipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{pri uslovu } a+b+c=1.$$

Rj.

Pri datom uslovu familija elipsi se pretvara u

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \dots (*)$$

Parcijalni izvodi od (*) po b i c su:

po b:
$$(-2)x^2(1-b-c)^{-3}\cdot(-1) + y^2\cdot(-2)b^{-3} = 0 \quad /:(-2)$$

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^3} - \frac{y^2}{b^3} = 0 \quad \dots (**)$$

po c:
$$x^2(-2)(1-b-c)^{-3}(-1) + z^2(-2)c^{-3} = 0 \quad /:(-2)$$

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^3} - \frac{z^2}{c^3} = 0 \quad \dots (***)$$

Eliminisanjem parametara b i c iz (*), (**) i (***) dobićemo jednačinu tražene obvojne površi.

$$(**) \text{ i } (***) \Rightarrow \frac{y^2}{b^3} = \frac{z^2}{c^3} \Rightarrow \frac{c^3}{b^3} = \frac{z^2}{y^2} \Rightarrow c = \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}} b$$

Ako uvrstimo dobijeno c u (***) imamo da je

$$\frac{x^2}{\left(1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b\right)^3} = \frac{z^2}{c^3} = \frac{y^2}{b^3} \Rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b}{b} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} + 1 + \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow b = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}} \quad \dots (\square)$$

Kako je $c=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}} b \overset{(\square)}{\Longrightarrow} \quad c = \frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$ ...(□□)

Ako uvrstimo vrijednosti od b i c iz (□) i (□□) u (*) dobijemo jednačine obvojne površi

$$\boxed{1-b-c=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}}$$

$$\frac{x^2}{\frac{x^{4/3}}{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}})^2}}+\frac{y^2}{\frac{y^{4/3}}{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}})^2}}+\frac{z^2}{\frac{z^{4/3}}{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}})^2}}=1$$

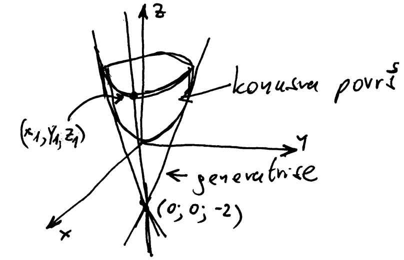
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$$

tražena obvojna površ

(#) Oko paraboloida $x^2+y^2=2z$ opisati konusnu površ sa tjemenom u tački $(0;0;-2)$.

Rj.

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave koja cijelo vrijeme prolazi kroz neku datu fiksiranu tačku S i siječe nepokretnu datu krivu (direktrisa).



Tačka (x_1,y_1,z_1) paraboloida će biti i tačka konusa ako tangentna ravan paraboloida u toj tački sadrži i vrh konusa $(0;0;-2)$.

Kako tačka (x_1,y_1,z_1) pripada paraboloidu, imamo

$$x_1^2+y_1^2=2z_1 \quad \ldots(1)$$

Vektor normale $\vec{n}$ na paraboloid je $\vec{n}=(2x,2y,-2)$ pa je jednačina tangentne ravni u tački $(x_1;y_1;z_1)$

$$2x_1(x-x_1)+2y_1(y-y_1)-2(z-z_1)=0 \quad /:2$$
$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-(z-z_1)=0$$

$\boxed{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$ jedn. ravni

Kako tačka $(0;0;-2)$ pripada ravni imamo

$$-x_1^2-y_1^2+z_1+2=0 \quad \ldots(2)$$

Jednačina generatrise kroz tačke (x_1,y_1,z_1) i $(0,0,-2)$ je

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z+2}{z_1+2}\quad\left(=\frac{1}{t}\right)$$

$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$ jedn. prave kroz dvije tačke

$x_1=xt$ ...(3)

$y_1=yt$ ...(4)

$z_1=(z+2)t-2$ ...(5)

Eliminišući parametre x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijemo jednačinu tražene površi.

$(1)+(2): \quad z_1=-2$

$z=-2$ i $(5) \Rightarrow \quad t=\frac{4}{z+2} \quad \xRightarrow{(3)\text{ i }(4)} \quad x_1=\frac{4x}{z+2}, \quad y_1=\frac{4y}{z+2}$

Ako uvrstimo gornje vrijednosti za x_1, y_1, z_1 u (1) dobićemo jednačinu konusne površi

$$\left(\frac{4x}{z+2}\right)^2+\left(\frac{4y}{z+2}\right)^2=4$$

$$16x^2+16y^2=4(z+2)^2 \quad /:4$$

$$4(x^2+y^2)=(z+2)^2$$

tražena jednačina konusne površi

Dio tablica integrala.

1. $\int u^a \mathrm{d}u=\frac{u^{a+1}}{a+1}+C,\ a\neq -1.$
2. $\int u^{-1}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\int\frac{u'}{u}\mathrm{d}x=\ln|u|+C.$
3. $\int a^u\mathrm{d}u=\frac{a^u}{\ln|a|}+C;\int e^u\mathrm{d}u=e^u+C.$
4. $\int \sin\mathrm{d}u=-\cos u+C.$
5. $\int \cos\mathrm{d}u=\sin u+C.$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\operatorname{tg}u+C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u=-\operatorname{ctg}u+C.$
8. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C.$
9. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$
10. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C.$
11. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a}}=\ln|u+\sqrt{u^2+a}|+C.$

Newton-Leibnizova formula.

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int f(u)\mathrm{d}u\Big|_a^b=F(u)|_a^b=F(b)-F(a),\text{ gdje je }F'(u)=f(u).$$

Osobine određenih integrala.

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$
2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x.$
5. $\int_a^b c\,f(x)\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Smjena promjenjivih u određenom integralu.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} x=\varphi(t) & x=a\Rightarrow a=\varphi(\alpha)\Rightarrow t=\alpha \\ dx=\varphi'(t)\mathrm{d}t & x=b\Rightarrow b=\varphi(\beta)\Rightarrow t=\beta\end{array}\right|=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta h(t)\mathrm{d}t$$

Nepravi integrali. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,...$

Računanje površine ravne figure. U zavisnosti od izgleda slike: $P=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P=\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$, $P=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P=\int_a^b[\eta(x)-\mu(x)]\mathrm{d}x$, $P=\int_c^d[g(y)-h(y)]\mathrm{d}y$, ...

Zapremina rotacionog tijela. Ako, kriva data u parametarskom obliku $C:\begin{cases} x=\eta(t)\\ y=\mu(t)\\ t_1\leq t\leq t_2\end{cases}$ rotira oko x-ose, zapremine se računa po formuli

$$V_x=\pi\int_{t_1}^{t_2}[\mu(t)]^2|\eta'(t)|\mathrm{d}t.$$

Ista kriva ako rotira oko y-ose, $V_y=\pi\int_{t_1}^{t_2}[\eta(t)]^2|\mu'(t)|\mathrm{d}t$. Iz ove dvije formule, za funkcije $y=f(x)$ i $x=g(y)$, slijedi $V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$ i $V_y=\pi\int_c^d[g(y)]^2\mathrm{d}y$.

Pravolinijska površ

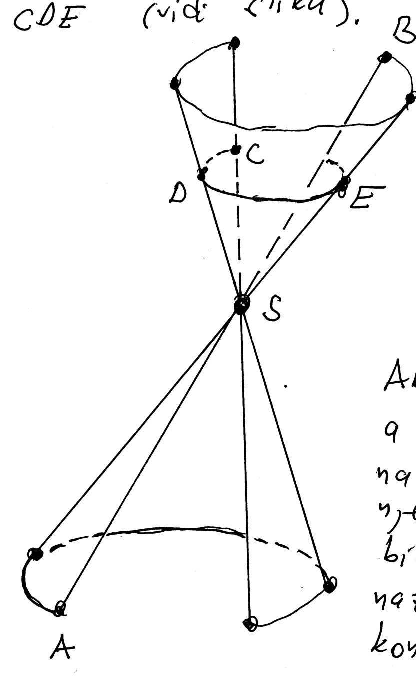
Pravolinijska površ (ili linijska površ) je površ formirana kretanjem prave (izvodnice) po nekoj krivoj (direktrisi). Linijska površ se može tretirati kao skup pravih koje zavise od jednog parametra. Linijske površi mogu biti razvojne ili kose. Razvojne se mogu "izvijanjem" razviti u ravan (npr. cilindar i konus). Tangentna ravan razvojne linijske površi u različitim tačkama jedne iste izvodnice je jedna ista ravan. Kao primjer kose linicke površi navedimo konoid.

Izvodnica (generatrisa) je prava koja pri svom kretanju siječe datu liniju (direktrisu pravoliniske površi) i formira (opisuje) pravoliniski površ. Ako izvodnica krećući se po direktrisi ostaje cijelo vrijeme paralelna samoj sebi, ona opisuje cilindričnu površ. Ako izvodnica krećući se po direktrisi prolazi stalno kroz jednu istu tačku prostora, ona opisuje konusnu površ.

Direktrisa pravoliniske površi je linija po kojoj se kreće tačka prave koja (prava) opisuje ovu površ. Ako je direktrisa mnogougao, a izvodnica po kretanju ostaje paralelna samoj sebi, pravoliniska površ će biti prizmatična površ.

Cilindarska površ je površ obrazovana kretanjem prave p, koja se premješta paralelno samoj sebi i siječe neku zadanu ravnu krivu ω (direktrisu cilindrične površi). Pri tome se prava p naziva generatrisom cilindrične površi. Ako je direktrisa cilindarske površi elipsa, parabola ili hiperbola tada se cilindrična površ naziva redom eliptičkom, paraboličkom ili hiperboličkom. U analitičkoj geometriji cilindrična površ naziva se također cilindrom.

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave p tako što ona svo vrijeme prolazi kroz nepokretnu (datu) tačku S i siječe nepokretnu (datu) krivu CDE (vidi sliku).

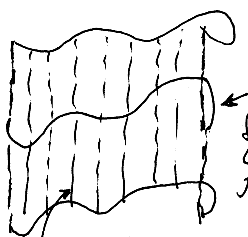


Prava p naziva se izvodnica (generatrisa) konusne površi, tačka S vrh konusne površi, a kriva CDE je direktrisa konusne površi. Konusna površ ima dvije grane, jednu od njih opisuje poluprava SA, drugu poluprava SB.

Ako je direktrisa konusne površi krug, a tačka S se normalnom projekcijom na ravan ovog kruga projektuje u njen centar O, konusna površ će biti obrtna površ koja se često naziva kružni konus ili jednostavno konus.

Odrediti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x-a)^2=-k^2(y-b)$; $z=c$ a generatrise su paralelne pravoj $x=mz$; $y=nz$;

Rj. Ako intuitivno pokušamo zamisliti ovu površ, ona bi bila



Uzmimo proizvoljnu tačku (x_1,y_1,z_1) na direktrisi. Tada je

$$(x_1-a)^2=-k^2(y_1-b) \quad \ldots(1)$$
$$z_1=c \quad \ldots(2)$$

Jednačina prave koja je paralelna generatrisi možemo napisati u obliku $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{1}$

($\vec{p}=(m,n,1)$ vektor pravca)

Tada je jednačina generatrise kroz tačku (x_1,y_1,z_1)

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{1} \quad (=t)$$

(gdje je (x,y,z) tačka na cilindričnoj površi) tj.

$$x_1=x-mt \quad \ldots(3)$$
$$y_1=y-nt \quad \ldots(4)$$
$$z_1=z-t \quad \ldots(5)$$

Eliminišući parametre x_1,y_1,z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Parametra z_1 se možemo "riješiti" ako (2) uvrstimo u (5):

$$c=z-t \Rightarrow t=z-c \quad \ldots(6)$$

Parametra t se možemo "riješiti" ako (6) uvrstimo u (3) i (4)

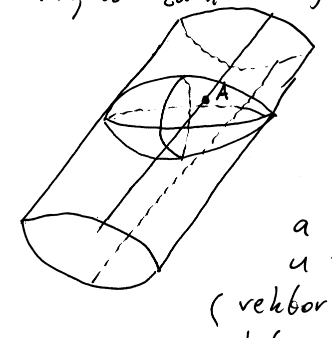
$$x_1=x-m(z-c) \quad \ldots(7)$$
$$y_1=y-n(z-c) \quad \ldots(8)$$

Na kraju ako (7) i (8) uvrstimo u (1) dobićemo traženu jednačinu cilindrične površi

$$[x-a-m(z-c)]^2+k^2[y-b-n(z-c)]=0.$$

Naći jednačinu cilindrične površi čije su generatrise paralelne pravoj $x=y=z$ i tangiraju elipsoid $x^2+4y^2+9z^2=1$.

Rj. Pokušajmo zamislit izgled tražene cilindrične površi.



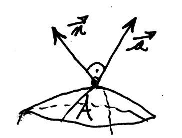
Ako je tačka $A(x_1,y_1,z_1)$ istovremeno na elipsi i na cilindru onda je sa jedne strane

$$x_1^2+4y_1^2+9z_1^2=1 \quad \ldots(1)$$

a sa druge strane je vektor $\vec{a}=(1,1,1)$ u tangentnoj ravni elipsoida u tački A (vektor $\vec{a}$ je paralelan sa vektorom pravca date prave $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$).

Vektor normale tangentne ravni je $\vec{n}=(x_1,4y_1,9z_1)$

$\left(F(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2-1,\ \frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=8y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=18z\right)$



Iz uslova normalnosti $\vec{a}$ i $\vec{n}$ izlazi da je

$$x_1+4y_1+9z_1=0. \quad \ldots(2)$$

Jednačina generatrise kroz tačku A je

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{1}=\frac{z-z_1}{1} \quad (=t) \quad \text{tj.}$$

$$x_1=x-t,\quad y_1=y-t,\quad z_1=z-t \quad \ldots(3)$$

gdje je $B(x,y,z)$ tačka na cilindru.

Eliminišući x_1,y_1,z_1 i t iz (1), (2) i (3) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Ako (3) uvrstimo u (2) dobićemo t izraženo preko x,y i z:

$$(\ -t)+4(y-t)+9(z-t)=0$$
$$-14t+x+4y+9z=0 \Rightarrow t=\frac{1}{14}(x+4y+9z).$$

Ako ovako dobijeno t vratimo u (3) dobićemo

$$x_1 = \frac{1}{14}(13x - 4y - 9z)$$

$$y_1 = \frac{1}{14}(-x + 10y - 9z)$$

$$z_1 = \frac{1}{14}(-x - 4y + 5z)$$

Novodobijene vrijednosti uvrstimo u (1):

$$(13x - 4y - 9z)^2 + 4(-x + 10y - 9z)^2 + 9(-x - 4y + 5z)^2 = 14^2$$

$$13^2 x^2 + 16y^2 + 81z^2 - 2\cdot 13\cdot 4xy - 2\cdot 13\cdot 9xz + 2\cdot 4\cdot 9yz$$

$$+4(x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 20xy + 18xz - 18yz)$$

$$+9(x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 8xy - 10xz - 40yz) = 14^2$$

$$182x^2 + 560y^2 + 630z^2 - 112xy - 252xz - 1008yz = 14^2 \quad /:14$$

$$13x^2 + 40y^2 + 45z^2 - 8xy - 18xz - 72yz - 14 = 0.$$

tražena jednačina cilindrične površi

Neka je površ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

gde je Jacobijeva matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ *na površ dat sa*

$$\vec{n} = [\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'], \quad \vec{r}_u' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Ako je površ zadata jednačinom

$$F(x,y,z) = 0,$$

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Ako je površ zadata jednačinom

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Jednačina tangentne ravni površi u tački M_o *odredjenoj vektorom položaja* $\vec{r}_o$ *je*

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)\vec{n}_{M_o} = 0.$$

Ako familija površi $f(x,y,z,a) = 0$ *ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametra* a *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b) = 0$ *ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametara* a *i* b *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke.

Dio teorije

§ 6. Definicija plohe i jednadžba plohe

6.1. Definicija

Plohom zovemo podskup $S \subset E^3$ koji se može zadati na jedan od ova dva načina:

a)
$$S = \{ (x, y, z) \in E^3 : \ F(x, y, z) = c \}, \tag{1}$$

gdje je $F : E^3 \to \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija takva da je $\mathrm{d}F \neq 0$.

b)
$$S = \{ (x, y, z) \in E^3 : z = f(x, y) \}, \tag{2}$$

gdje je $f : D \to \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija, D otvoren i povezan skup u ravnini.

Pretpostavimo da podskup $S \subset E^3$ dopušta prikaz u obliku:

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{3}$$

tj. neka vrijedi:

$$S = \{ (x, y, z) \in E^3 : \ x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v) \}, \tag{4}$$

gdje su $x, y, z : D \to \mathbf{R}$ diferencijabilna obostrano jednoznačna (ili 1–1) preslikavanja, D otvoren i povezan skup u E^2, takva da za funkciju:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \ \vec{i} + y(u, v) \ \vec{j} + z(u, v) \ \vec{k} \tag{5}$$

vrijedi:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}. \tag{6}$$

Tada je S ploha u smislu navedene definicije.

Uvjet (6), tj. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ znači da je rang matrice:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \tag{7}$$

jednak dva.

6.2. Jednadžba plohe. Karta plohe *S*. Parametrizacija od *S*

Jednadžbu:

$$F(x, y, z) = c \tag{8}$$

zovemo *implicitnom jednadžbom plohe,* jednadžbu:

$$z = f(x, y) \tag{9}$$

eksplicitnom jednadžbom plohe, jednadžbe:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{10}$$

zovemo parametarskim jednadžbama plohe, a jednadžbu:

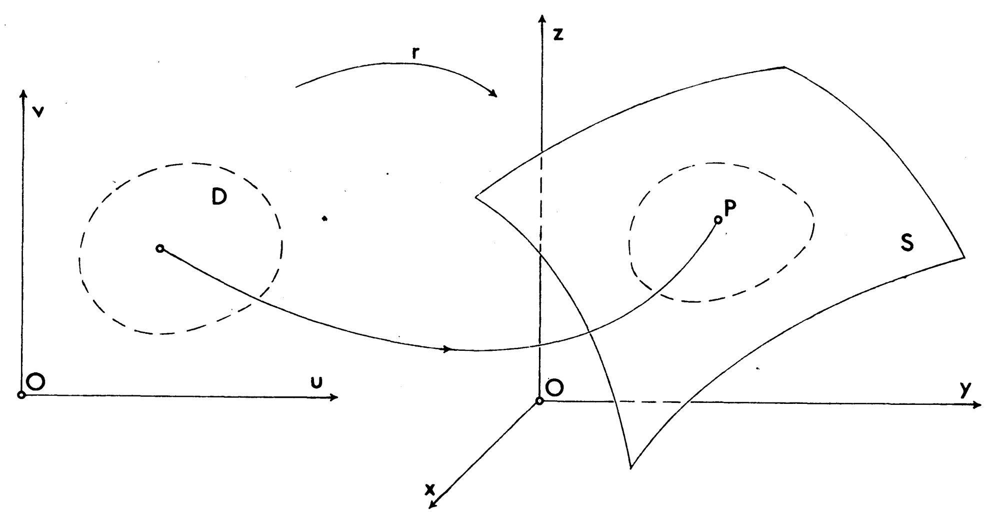
$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \ \vec{i} + y(u, v) \ \vec{j} + z(u, v) \ \vec{k} \tag{11}$$

zovemo *vektorskom jednadžbom plohe.*

Svaka ploha ne mora dopuštati prikaz u obliku (3). Naprimjer, sfera ne dopušta takav prikaz (vidi zad. 204). Međutim oko svake točke plohe postoji okolina koja dopušta takav prikaz (sl. 25). U tom slučaju jednadžbe (3) zovu se *kartom te okoline.* Ako ploha u cijelosti dopušta kartu (3) onda takvu plohu zovemo *jednostavnom plohom.*

Naglasimo još jednom da je jednostavnu plohu moguće prekriti jednom jedinom kartom (3).

Ako je S ploha za koju postoje funkcije (3), gdje su $x, y, z : D \to \mathbf{R}$ diferencijabilne funkcije (ne zahtijeva se obostrana jednoznačnost), D je otvoren (ili zatvoren) i povezan skup u E^2, koje zadovoljavaju uvjet (7), onda za jednadžbe (3) kažemo da predstavljaju *parametrizaciju plohe S.*



Sl. 25.

Singularna točka parametrizacije je ona točka u kojoj nije ispunjen uvjet (6), tj. ona točka parametrizacije za koju vrijedi:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}. \tag{12}$$

Singularne točke parametrizacije obično se isključuju iz razmatranja.

6.3. Krivolinijske ili Gaussove koordinate na plohi

Neka je ploha zadana jednadžbama (3) ili (5). Damo li parametru v konstantnu vrijednost $v = C$, a parametar u mijenjamo, onda je preslikavanje $u \rightarrow \vec{r}(u, C)$ neka krivulja na plohi. Ta krivulja se zove *u-krivulja* (parametarska u-crta) i njena je jednadžba:

$$x = x(u, C), \qquad y = y(u, C), \qquad z = z(u, C),$$

ili

$$\vec{r}(u, C) = x(u, C)\ \vec{i} + y(u, C)\ \vec{j} + z(u, C)\ \vec{k}. \tag{13}$$

Analogno, damo li parametru u konstantnu vrijednost $u = C$, preslikavanje $v \rightarrow \vec{r}(C, v)$ je *v-krivulja* (parametarska v-crta) na plohi.

Njena je jednadžba:

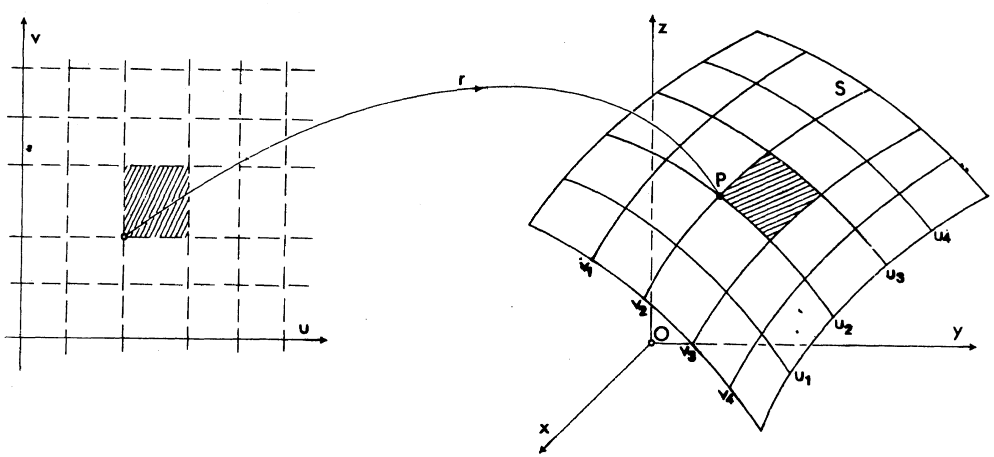
$$x = x(C, v), \qquad y = y(C, v), \qquad z = z(C, v),$$

ili

$$\vec{r}(C, v) = x(C, v)\ \vec{i} + y(C, v)\ \vec{j} + z(C, v)\ \vec{k}. \tag{14}$$

Na taj način dobijemo na plohi S dvije familije krivulja (vidi sl. 26).

Svakom točkom plohe prolazi po jedna krivulja iz svake od tih familija. U tom se slučaju brojevi $u = u_i$, $v = v_j$ zovu *krivolinijske ili nutarnje ili Gaussove koordinate* točke P.



Sl. 26

6.4. Krivulje na plohi

Neka je zadana funkcija $\alpha : I \rightarrow S$, gdje je I otvoren interval, a S ploha. Funkciju α zvat ćemo *krivuljom na plohi S*, ako je α diferencijabilna funkcija. Ako je još ploha S dana svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = \{x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\}, \qquad (u, v) \in D,$$

$D \subseteq E^2$ je otvoren skup, onda krivulja α na plohi dopušta prikaz:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t),\ v(t)), \qquad t \in I, \tag{15}$$

gdje su $u = u(t)$, $\quad v = v(t)$ diferencijabilne funkcije $u,\ v : I \rightarrow \mathbf{R}$.

Jednadžba (15) se zove *vektorska jednadžba krivulje α na plohi S*. To je krivulja u smislu definicije krivulje u § 3.

Parametarske *u*- i *v*-crte specijalan su slučaj krivulja na plohi.

Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcije "Definicija povši i jednačine površi")

203. Zadana je sfera svojom implicitnom jednadžbom:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r^2,$$

gdje je $C=(c_1,\, c_2,\, c_3)$ središte sfere, a r polumjer.
Dokažite da je sfera ploha.

Najprije, funkcija:

$$F\equiv (x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r^2$$

je diferencijabilna. Treba još pokazati da je $\mathrm{d}F\neq 0$.

Imamo:

$$\mathrm{d}F=2(x-c_1)\,\mathrm{d}x+2(y-c_2)\,\mathrm{d}y+2(z-c_3)\,\mathrm{d}z.$$

Ovo može biti nula samo za $x=c_1$, $y=c_2$, $z=c_3$ istovremeno.
To bi značilo da je točka $C=(c_1,\, c_2,\, c_3)$ na sferi, što nije ispunjeno. Uvijek je, dakle, $\mathrm{d}F\neq 0$, pa je sfera ploha.

U zadacima od 204. do 210. zadan je skup S svojom jednadžbom oblika $F(x,\, y,\, z)=c$ ili $z=f(x,\, y)$.

1° Ispitati da li je S ploha.
2° Naći za S neku kartu, odnosno parametrizaciju.
3° Naći geometrijsko značenje parametara.

204. S je sfera: $x^2+y^2+z^2=r^2$.

1° U zad. 203. pokazali smo da je to ploha.
2° Ploha S dopušta kartu:

$$\vec{r}(u,\, v)=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+\sqrt{r^2-u^2-v^2}\,\vec{k}, \tag{16}$$

koordinatne funkcije te karte su diferencijabilna, obostrano jednoznačna

preslikavanja, D je otvoren skup, tj. $D=\{(u,\, v):u^2+v^2<r^2\}$. Treba pokazati da je $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$.

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & \dfrac{\partial\sqrt{r^2-u^2-v^2}}{\partial u}\\ 0 & 1 & \dfrac{\partial\sqrt{r^2-u^2-v^2}}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & \dfrac{-u}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\\ 0 & 1 & \dfrac{-v}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\end{vmatrix},$$

dakle je $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$.
To je karta oko svake točke na gornjoj polusferi.
Analogno bi se pokazalo da svaka točka donje polusfere dopušta kartu:

$$\vec{r}(u,\, v)=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}-\sqrt{r^2-u^2-v^2}\,\vec{k}, \tag{17}$$

pa zatim za desnu i lijevu polusferu, te prednju i stražnju polusferu.

3° Parametarske u-krivulje jesu kružnice paralelne s koordinatnom XOZ ravninom, a v-krivulje jesu kružnice paralelne s koordinatnom YOZ ravninom.

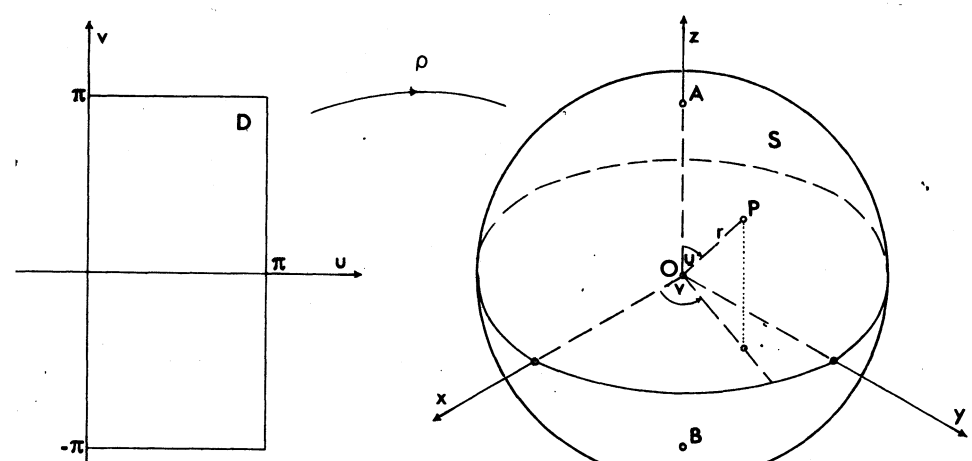
Ad 2° Odaberimo parametrizaciju $[0,\pi]\times[-\pi,\pi]\to E^3$ zadanu sa:

$$\begin{aligned}x&=r\sin u\cos v\\ y&=r\sin u\sin v\\ z&=r\cos u,\end{aligned} \tag{18}$$

što se piše još i ovako:

$$\vec{r}(u,\, v)=\{r\sin u\cos v,\, r\sin u\sin v,\, r\cos u\}. \tag{19}$$

To je preslikavanje ϱ zatvorenog skupa D na S, tj. $\varrho: D\to S$ (vidi sl. 27).



Sl. 27.

(18) nije parametrizacija čitavog skupa S, jer se sa sfere mora izuzeti sjeverni pol $A=(0, 0, r)$ i južni pol $B=(0, 0, -r)$ (radi uvjeta (6)). Trebamo, dakle, promatrati skup:

$$S \setminus \{\text{sjeverni, južni pol}\}. \tag{20}$$

Skup (20), međutim, dopušta parametrizaciju (18), drugim riječima (18) je parametrizacija za skup (20).

Osim toga (18) nije karta (jer (18) nije 1–1 preslikavanje, D nije otvoren skup), a kamoli da bi (18) bila karta koja bi prekrila cijelu sferu. Sfera, dakle, nije jednostavna ploha.

Ad 3° Koordinatne u-krivulje ($v=\text{const.}$) *su meridijani,* a $v-$krivulje ($u=\text{const.}$) *paralele.* Geometrijski, dva parametra u i v znače Gaussove koordinate i to *geografsku širinu (u)* i *geografsku dužinu (v).*

Parametrizacija (18) se dosta koristi u kartografiji.

Pokažimo još da je za sve točke skupa (20) $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$.

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r\cos u\cos v & r\cos u\sin v & -r\sin u \\ -r\sin u\sin v & r\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin^2 u\cos v\ \vec{i} + r^2\sin^2 u\sin v\ \vec{j} + r^2\sin u\cos u\ \vec{k}.$$

Par $(u, v)=(0, 0)$ preslikava se u sjeverni pol $A=(0, 0, r)$, a par $(u, v)=(\pi, 0)$ u južni pol $B=(0, 0, -r)$. Kako su te točke ionako isključene iz skupa (20), to nećemo uzimati u obzir $u=0$, $u=\pi$, niti $v=0$. Dakle je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ uvijek $\neq \vec{0}$ jer je za $u \in (0, \pi)$ uvijek $\sin u \neq 0$, a $\cos v$ i $\sin v$ ne mogu iščezavati za isti v.

Pravokutnik $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi, \pi]$ preslikava se na gornju polusferu, a pravokutnik $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-\pi, \pi]$ na donju polusferu (vidi sl. 27).

Budući da je u sjevernom i južnom polu $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ (uvjet (12)), to su sjeverni i južni pol *singularne točke* parametrizacije (18) pa bi se te točke i zbog toga isključile iz razmatranja. Geometrijski se singularnost očituje time, što se u sjevernom i južnom polu sastaju *svi meridijani.* Svim točkama skupa (20) inače prolaze samo po jedna paralela i po jedan meridijan (vidi zadatke 266, 272, 323).

205. S je rotacioni elipsoid (vidi sl. 28):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Razmatranja su analogna onima sa sferom iz zad. 204.

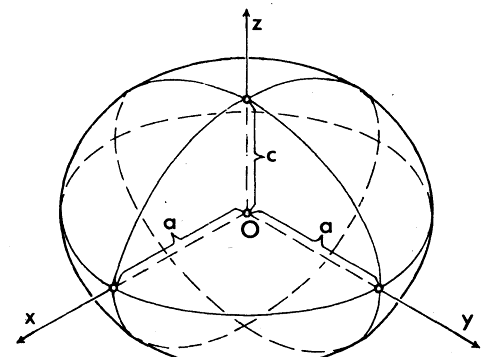
Jednadžbe:

$$x = a\sin u\cos v$$
$$y = a\sin u\sin v$$
$$z = c\cos u$$

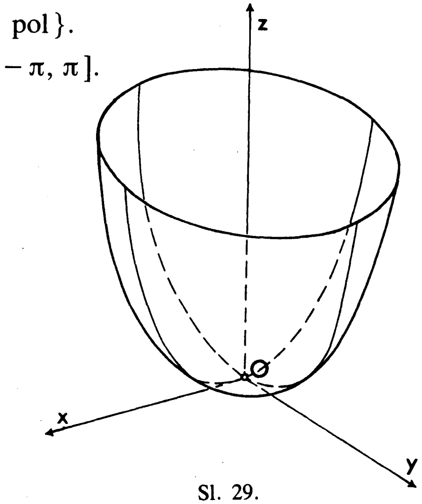
predstavljaju parametrizaciju skupa:

$$S \setminus \{\text{sjeverni, južni pol}\}.$$

Pritom je $D=[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$.



Sl. 28.



Sl. 29.

206. S je rotacioni paraboloid (vidi sl. 29):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z.$$

S je ploha, jer je z diferencijabilna funkcija.

Promotrimo preslikavanje $r: D \to E^3$ dano sa:

$$\vec{r}(u, v) = \left\{u, v, \frac{1}{a^2}(u^2+v^2)\right\}, \text{ gdje je } D = E^2.$$

Ovo preslikavanje je karta koja je preslikavanje na, pa je rotacioni paraboloid *jednostavna ploha.*

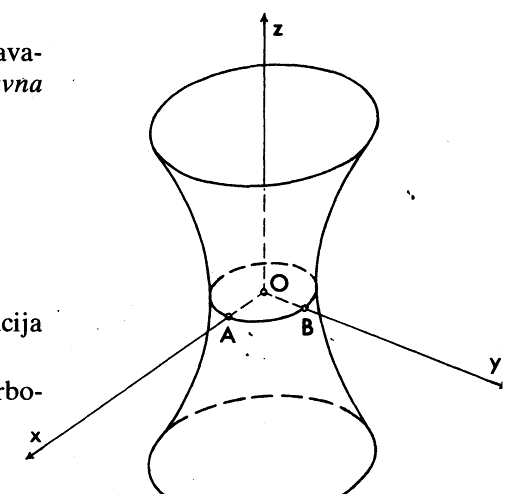
Jednadžbama:

$$x = a u\cos v$$
$$y = a u\sin v$$
$$z = u^2,$$

gdje je $D=R \times [0, 2\pi]$, je dana parametrizacija $D \to S$ plohe S.

207. Ploha S je jednoplošni rotacioni hiperboloid (vidi sl. 30):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Sl. 30.

S je ploha, jer je F diferencijabilna funkcija i jer je d $F \neq 0$.

Jednadžbama:

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v$$
$$y = a \operatorname{ch} u \sin v$$
$$z = c \operatorname{sh} u$$

je dana parametrizacija

$D \to S$, $D = R \times [0, 2\pi]$, plohe S. S nije jednostavna ploha.

208. S je dvoplošni rotacioni hiperboloid (vidi sl. 31):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

S je ploha, jer je F diferencijabilno i d$F \neq 0$.

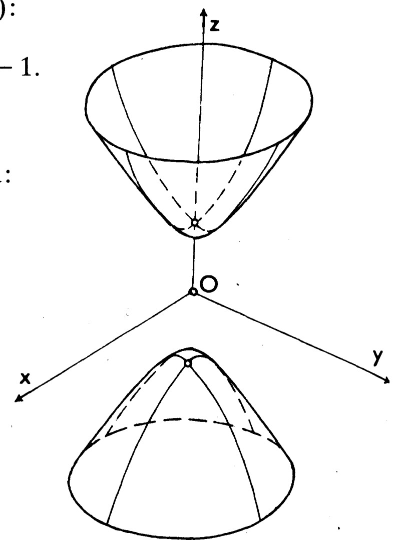
Ploha S dopušta parametrizaciju $D \to S$ danu sa:

$$x = a \operatorname{sh} u \cos v$$
$$y = a \operatorname{sh} u \sin v$$
$$z = c \operatorname{ch} u,$$

gdje je $D = R \times [0, 2\pi]$.

S nije jednostavna ploha.

U zadacima 206, 207. i 208. koordinatne u- i v-linije jesu meridijani i paralele na plohi, a geometrijski par brojeva (u, v) znače Gaussove koordinate.



Sl. 31.

209. S je kružni valjak (vidi sl. 32):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

S dopušta parametrizaciju $D \to S$ danu sa:

$$x = r \cos v$$
$$y = r \sin v$$
$$z = u,$$

pritom je $D = R \times [0, 2\pi]$.

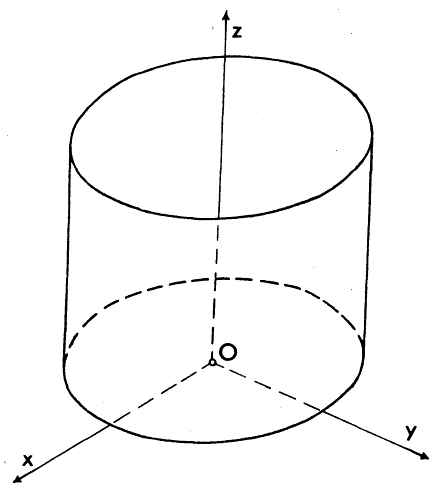
S nije jednostavna ploha.

210. S je kružni stožac (vidi sl. 33):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Skup:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \right\}$$



Sl. 32.

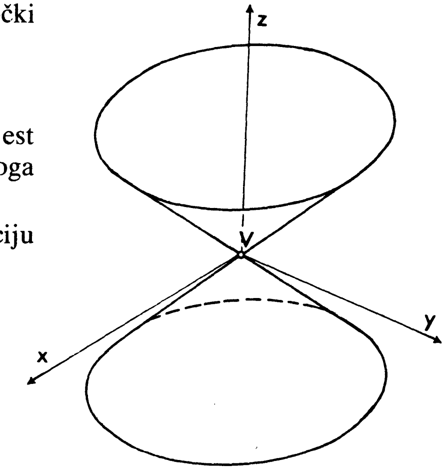
nije ploha jer je d$F = 0$ u točki $V = (0, 0, 0)$.

Skup:

$S \setminus \{$Vrh stošca, tj. $V = (0, 0, 0)\}$ jest ploha, jer je d$F \neq 0$ u svim točkama toga skupa.

Skup $S \setminus \{V\}$ dopušta parametrizaciju $D \to S \setminus \{V\}$ danu sa:

$$x = a u \cos v$$
$$y = a u \sin v$$
$$z = c u,$$



Sl. 33.

gdje je $D = R \times [0, 2\pi]$.

Pokažite da je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ na skupu $S \setminus \{V\}$.

U točki $V = (0, 0, 0)$, tj. $u = 0$ bilo bi $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$, dakle bi $V = (0, 0, 0)$ bila singularna točka parametarske mreže, no singularne točke isključujemo iz razmatranja.

U zadacima 209. i 210. koordinatne u i v linije znače meridijane, koji su izvodnice valjka odnosno stošca, i paralele. Par (u, v) znači Gaussove koordinate.

211. Zadana je ploha parametarskim jednadžbama

$$x = a \cos^3 u \cos^3 v$$
$$y = a \cos^3 u \sin^3 v$$
$$z = a \sin^3 u,$$
$$u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \qquad v \in [-\pi, \pi].$$

Naći implicitnu jednadžbu te plohe.

Kako je:

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} = \cos u \cos v$$
$$\sqrt[3]{\frac{y}{a}} = \cos u \sin v$$
$$\sqrt[3]{\frac{z}{a}} = \sin u,$$

to je:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{a}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\frac{y}{a}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\frac{z}{a}}\right)^2=\cos^2 u\cos^2 v+\cos^2 u\sin^2 v+\sin^2 u=1.$$

Implicitna jednadžba zadane plohe prema tome glasi:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

212. Dokazati da ploha dana parametarskim jednadžbama:

$$x=a\,\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$
$$y=b\,\frac{2u}{u^2+v^2+1}$$
$$z=c\,\frac{2v}{u^2+v^2+1},\qquad u,v\in\mathbf{R}$$

predstavlja elipsoid.

Imamo:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{u^4+v^4+1+2u^2v^2-2u^2-2v^2}{(u^2+v^2+1)^2}$$
$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{4u^2}{(u^2+v^2+1)^2}$$
$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{4v^2}{(u^2+v^2+1)^2},$$

pa je:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{u^4+v^4+1+2u^2v^2+2u^2+2v^2}{(u^2+v^2+1)^2}=\frac{(u^2+v^2+1)^2}{(u^2+v^2+1)^2}=1,$$

što predstavlja elipsoid.

213. Zadano je preslikavanje $E^2\to E^3$ sa:

$$x=2u+v$$
$$y=4u^2+4uv+v^2$$
$$z=e^{2u}e^v.$$

Ispitati da li je skup:

$$S=\{(x,y,z)\in E^3: x=2u+v,\quad y=4u^2+4uv+v^2,\quad z=e^{2u}e^v\}$$

ploha.

Najprije, to je preslikavanje diferencijabilno, još mora biti ispunjen uvjet $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$ ili što je isto rang matrice (7) mora biti dva. Ispitajmo rang matrice:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4(2u+v) & 2e^{2u}e^v \\ 1 & 2(2u+v) & e^{2u}e^v \end{vmatrix}.$$

Ova matrica nema rang dva, nego joj je rang jedan, za svako u i v. To znači da su vektori:

$$\vec{r}_u=\{2,\ 4(2u+v),\ 2e^{2u}e^v\}$$
$$\vec{r}_v=\{1,\ 2(2u+v),\ e^{2u}e^v\}$$

kolinearni.

Prema tome S nije ploha.

214. Za plohu zadanu eksplicitnom jednadžbom (9) naći vektorsku jednadžbu.

Zadana je ploha:

$$z=f(x,y).$$

Stavimo li za parametra: $x=x,\ y=y,\ z=f(x,y)$ tada vektorska jednadžba glasi:

$$\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k},\qquad x,y\in\mathbf{R}.$$

ili:

Stavimo li za parametre $x=u,\ y=v,\ z=f(u,v)$ tada vektorska jednadžba glasi:

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+f(u,v)\vec{k},\qquad u,v,\in\mathbf{R}.$$

215. U ravnini XOZ zadana je krivulja $\alpha: I\to E^3$

1° $\qquad z=f(x),\quad x\in I$

2° $\qquad x=g(u),\quad y=0,\quad z=h(u),\quad u\in I.$

a) Napisati parametarske jednadžbe plohe koja nastaje rotacijom krivulje α oko osi OZ.
b) Napisati vektorsku jednadžbu tako nastale rotacione plohe.
c) Što su koordinatne krivulje $u=C,\ v=C$? Koje je geometrijsko značenje parametara u i v?

1° Eksplicitna jednadžba rotacione plohe glasi (vidi sl. 34):

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}),$$

a parametarske jednadžbe:

$$x=u\cos v$$
$$y=u\sin v$$
$$z=f(u),\quad u\in I,\quad v\in[0,2\pi],$$

ili općenitije:

$$x=g(u)\cos v$$
$$y=g(u)\sin v$$
$$z=f(g(u))=h(u),\ u\in I,$$
$$v\in[0,2\pi],$$

gdje je $g: I \to \mathbf{R}$ bilo koja diferencijabilna funkcija.

2° Jednadžba rotacione plohe glasi:

$$\sqrt{x^2+y^2} = g(u), \quad z = h(u),$$

a njena parametarska jednadžba:

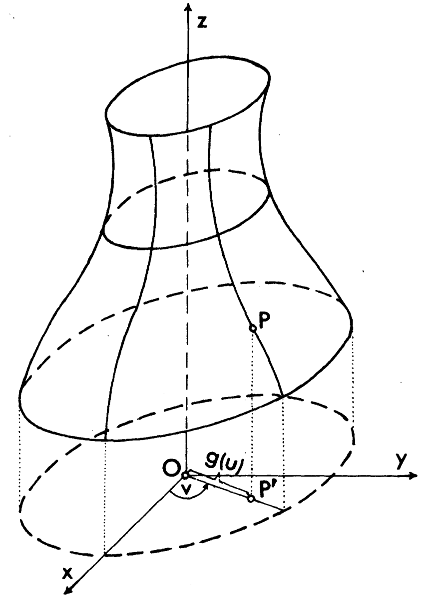
$$x = g(u)\cos v$$
$$y = g(u)\sin v$$
$$z = h(u), \quad u \in I, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Vektorska se jednadžba rotacione plohe može još napisati u obliku:

$$\vec{r}(u, v) = g(u)\,\vec{e}(v) + h(u)\,\vec{k},$$

gdje je $\vec{e}(v)$ normirana vektorska funkcija

$$\vec{e}(v) = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j}.$$



Sl. 34.

Koordinatne krivulje jesu:

za $u = \text{const.}$ v krivulje se zovu paralele,
za $v = \text{const.}$ u krivulje se zovu meridijani.

Parametri u i v geometrijski znače Gaussove koordinate.
Ploha nije jednostavna.

216. Naći parametarske jednadžbe ravnine i njezinu vektorsku jednadžbu. Što predstavlja koordinatna mreža krivulja te ravnine?

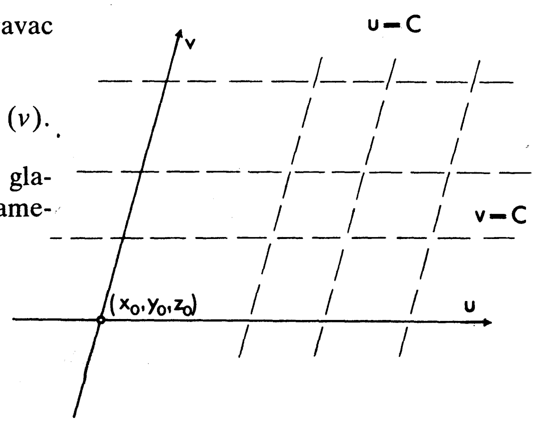
Točkom (x_0, y_0, z_0) postavimo pravac (vidi sl. 35):

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{n_1} \qquad (u)$$

Istom točkom postavimo drugi pravac (nekolinearan s prvim):

$$\frac{x-x_0}{l_2} = \frac{y-y_0}{m_2} = \frac{z-z_0}{n_2} \qquad (v).$$

Parametarske jednadžbe tih pravaca glase, označimo li kod prvog pravca parametar sa u, a kod drugoga sa v:



Sl. 35.

$$x = x_0 + l_1 u, \quad \text{odnosno} \quad x = x_0 + l_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u, \qquad y = y_0 + m_2 v$$
$$z = z_0 + n_1 u, \quad u \in \mathbf{R} \qquad z = z_0 + n_2 v \quad v \in \mathbf{R}$$

Tada će

$$x = x_0 + l_1 u + l_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u + m_2 v, \qquad (1)$$
$$z = z_0 + n_1 u + n_2 v, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

biti parametarske jednadžbe ravnine. Za $v = 0$ dobivamo početni prvi pravac (u), a za $u = 0$ drugi (v). Za razne vrijednosti od u i v dobivamo pravce koji su paralelni s polaznim pravcima. Ovi pravci predstavljaju prema tome koordinatne krivulje – pravce u ravnini i čine mrežu pravaca u ravnini. Polazni pravci (u) i (v) predstavljaju koordinatne osi kosokutnog koordinatnog sustava te ravnine.

Ravnina je jednostavna ploha.

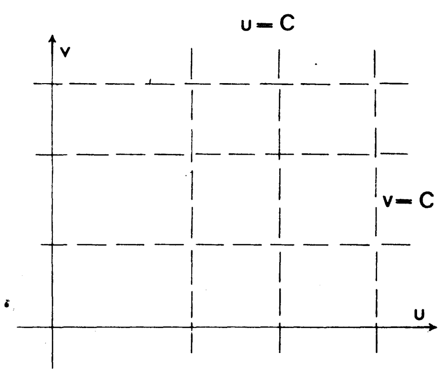
Vektorska jednadžba ravnine glasi:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,u + \vec{b}\,v,$$

gdje je $\vec{r}_0$ radijvektor početne točke ili ishodišta O′ kosokutnog koordinatnog sustava, a vektori $\vec{a}(l_1, m_1, n_1)$ i $\vec{b}(l_2, m_2, n_2)$ jesu koordinatni vektori koordinatnog sustava te ravnine (kolinearni sa zadana dva pravca).

Specijalni slučaj:

a) Promotrimo parametrizaciju ravnine definiranu jednadžbama (vidi sl. 36):



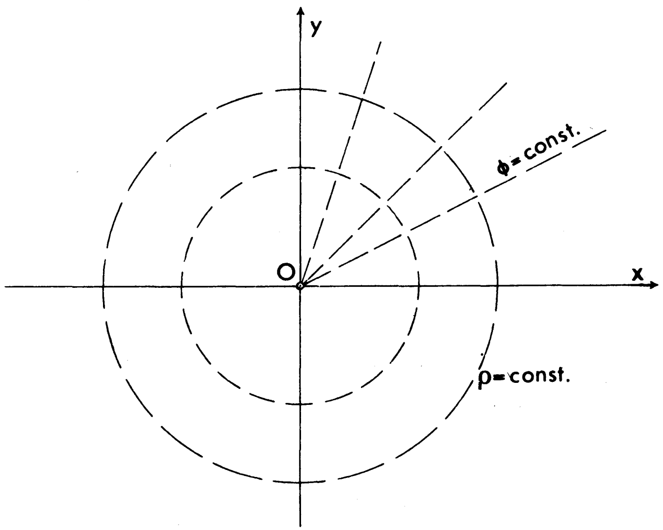
Sl. 36.

$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = 0, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

Ovdje su koordinatne osi zadane svojim jediničnim vektorima $\vec{u}(1, 0, 0)$ i $\vec{v}(0, 1, 0)$ i prolaze ishodištem 0 koordinatnog sustava XOY.

b) Uzmemo li u ravnini XOY polarne koordinate tada njene parametarske jednadžbe možemo pisati ovako (vidi sl. 37):

$$x = \varrho\cos\phi$$
$$y = \varrho\sin\phi$$
$$z = 0.$$



Sl. 37.

To je parametrizacija skupa $XOY \setminus \{\text{ishodište}\}$.

217. Naći parametarske jednadžbe ravnine

$$3x + 4y + 6z - 20 = 0.$$

Treba ravninu predočiti u obliku (1) iz zad. 216.

Prvi način:

Uzmimo po volji funkcije $x,\ y : E^2 \to \mathbf{R}$ ovako:

$$x = -2 + 3u - v$$
$$y = 1 - 2u + 3v,$$

što uvršteno u jednadžbu zadane ravnine daje:

$$z = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}u - \frac{3}{2}v, \qquad z : E^2 \to \mathbf{R}.$$

Jednadžbe:

$$x = -2 + 3u - v$$
$$y = 1 - 2u + 3v$$
$$z = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}u - \frac{3}{2}v$$

predstavljaju tada parametarske jednadžbe tražene ravnine. Vidimo zaista da točka $O' = \left(-2,\ 1,\ \frac{7}{3}\right)$ leži u zadanoj ravnini. Ta točka je ishodište traženog kosokutnog sustava u ravnini s osima:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z - \frac{7}{3}}{-\frac{1}{6}} \qquad (u)$$

za $v = 0$ i

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z - \frac{7}{3}}{-\frac{3}{2}} \qquad (v)$$

za $u = 0$.

Drugi način:

Opet uzmemo po volji

$$x = -2 + 3u - v$$
$$y = 1 - 2u + 3v.$$

Najprije, točka $A = (-2,\ 1, z_0)$ leži u ravnini, što daje $z_0 = \frac{7}{3}$. Nadalje, koordinatni vektori jesu $\vec{a}(3, -2,\ n_1)$ i $\vec{b}(-1,\ 3,\ n_2)$. Kako je vektor normale na zadanu ravninu $\vec{N}(3,\ 4,\ 6)$, to iz uvjeta

$$\vec{N} \cdot \vec{a} = 0,$$
$$\vec{N} \cdot \vec{b} = 0$$

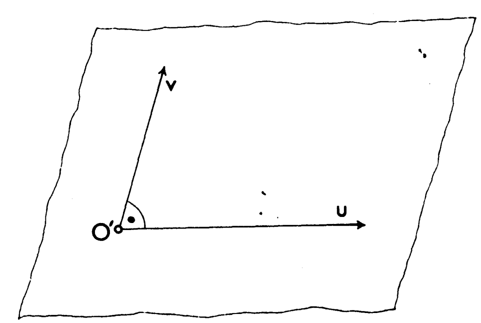
izlazi $n_1 = \frac{1}{6}$ i $n_2 = -\frac{3}{2}$, dakle je

$$z = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}u - \frac{3}{2}v.$$

218. Naći parametarske jednadžbe ravnine $3x + 4y - 2z - 3 = 0$ i to tako, da su koordinatne krivulje dvije familije međusobno okomitih pravaca (vidi sl. 38). Točku te ravnine odaberimo po volji kao ishodište $O' = (1, 2, 4)$ tog koordinatnog sustava ($x = 1$, $y = 2$ odaberemo po volji, što daje iz jednadžbe ravnine $z = 4$).

Prvu koordinatnu os u odaberimo tako da leži u ravnini, tj. da prolazi točkom O' i da bude $\vec{N} \cdot \vec{u} = 0$, gdje je $\vec{u}(6, -2,\ n_1)$ odabrano po volji, a $\vec{N}(3,\ 4, -2)$ vektor normale ravnine.

Navedeni uvjet daje $n_1 = 5$, pa je $\vec{u}(6, -2,\ 5)$



Sl. 38.

koordinatni vektor, a

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{5} \qquad (u)$$

jest koordinatna os u traženog koordinatnog sustava.

Potražimo i drugu koordinatnu os.

Ona mora također ležati u zadanoj ravnini, tj. prolaziti točkom O' i biti još k tome okomita na prvu os u. Moraju biti dakle zadovoljeni uvjeti:

$$\vec{N}\cdot\vec{v}=0$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0,$$

gdje je $\vec{v}(l_2, m_2, n_2)$. Dobijemo sustav jednadžbi:

$$3l_2+4m_2-2n_2=0$$
$$6l_2-2m_2+5n_2=0,$$

odnosno podijelivši npr. s n_2:

$$3\frac{l_2}{n_2}+4\frac{m_2}{n_2}=2$$
$$6\frac{l_2}{n_2}-2\frac{m_2}{n_2}=-5.$$

Rješenja su:

$$l_2=-\frac{8}{15}n_2, \qquad m_2=\frac{9}{10}n_2.$$

Jednadžba pravca v glasi:

$$\frac{x-1}{-\frac{8}{15}n_2}=\frac{y-2}{\frac{9}{10}n_2}=\frac{z-4}{n_2},$$

odnosno:

$$\frac{x-1}{-16}=\frac{y-2}{27}=\frac{z-4}{30} \qquad (v).$$

Prema tome tražene parametarske jednadžbe glase:

$$x=1+6u-16v$$
$$y=2-2u+27v$$
$$z=4+5u+30v, \qquad u,\ v\in\mathbf{R}.$$

(Vidi zad. 244.)

219. Napisati parametarske jednadžbe *pseudosfere* koja nastaje rotacijom traktrise:

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$$

oko svoje asimptote, tj. osi OY (vidi sl. 39).

Traktrisa je evolventa lančanice čija je jednadžba (u ovom slučaju)

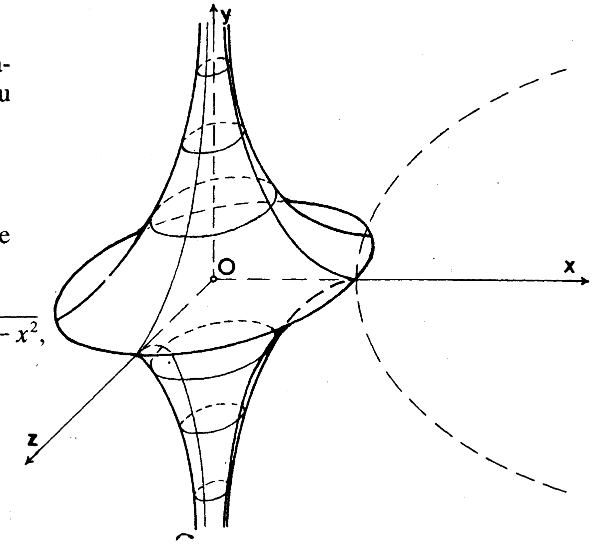
$$x=a\,\mathrm{ch}\frac{y}{a}$$

Jednadžba traktrise još se može napisati u obliku:

$$y=a\ln\frac{a\pm\sqrt{a^2-x^2}}{x}\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

ili

$$y=a\,\mathrm{Ar\,ch}\frac{a}{x}\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$



Sl. 39.

Jednadžba pseudosfere tada glasi:

$$y=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-(x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+z^2}}-\sqrt{a^2-(x^2+z^2)},$$

(uzevši gornje predznake).

Stavimo li:

$$x=a\cos v\sin u$$
$$z=a\sin v\sin u$$

dobivamo:

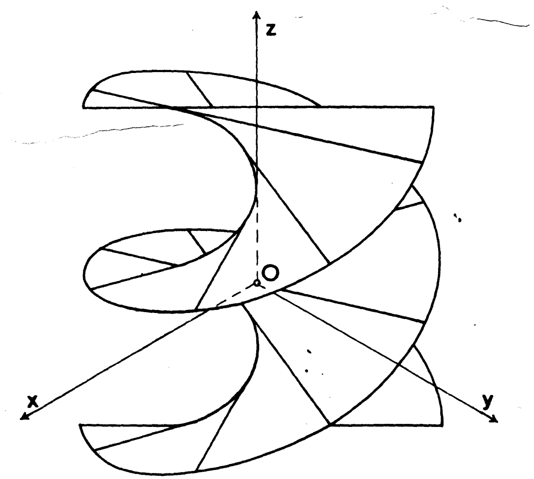
$$y=-a\left[\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2}+\cos u\right],$$

$$u\geqslant 0, \qquad v\in[0,2\pi],$$

pa parametarske jednadžbe pseudosfere glase:

$$x=a\cos v\sin u$$
$$y=-a\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2}-a\cos u$$
$$z=a\sin v\sin u.$$

220. Napisati parametarske i eksplicitnu jednadžbu *helikoida*. Helikoid je zavojna ploha koja nastaje rotacijom bilo kojeg pravca (profil) oko neke osi, koju taj pravac siječe pod pravim kutem (vidi sl. 40).



Sl. 40.

Pritom se pravac istovremeno jednoliko kreće u smjeru te osi. Brzine obiju kretanja su proporcionalne (vidi zad. 151).

Ova je ploha ujedno i geometrijsko mjesto svih glavnih normala zavojnice na valjku.

Parametarske jednadžbe helikoida glase:

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = bv, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

Eliminiravši parametre u i v dobijemo jednadžbu helikoida:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{b}.$$

221. Napisati parametarske jednadžbe *katenoida* koji se dobije rotacijom lančanice

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{a},$$

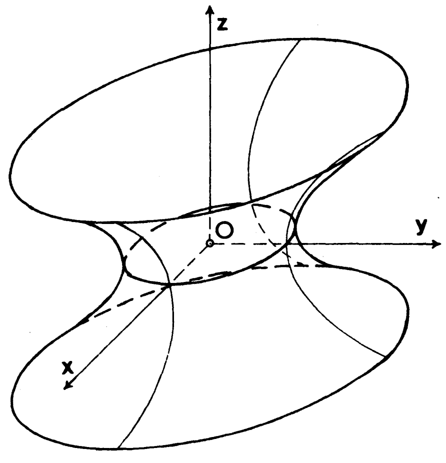
oko osi OZ (vidi sl. 41).

a) Jednadžba katenoida glasi:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{a}.$$

Stavimo li $z = u$ dobijemo parametarske jednadžbe katenoida:

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\cos v$$
$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\sin v$$
$$z = u, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi].$$



Sl. 41.

b) *2. način*

Jednadžbu lančanice možemo napisati i u parametarskom obliku ovako:

U jednadžbi $z = a\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x}{a}$.

Uvedimo parametar ovako:

$$x = \sqrt{u^2+a^2}, \text{ pa je } z = a\,\mathrm{arch}\,\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a} = a\ln\frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{a}.$$

Parametarske jednadžbe lančanice tada glase:

$$x = \sqrt{u^2+a^2}, \qquad y = 0, \qquad z = a\ln\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a}, \qquad u \in \mathbf{R}.$$

Parametarske jednadžbe katenoida glase prema zad. 215. 2°:

$$x = \sqrt{u^2+a^2}\cos v$$
$$y = \sqrt{u^2+a^2}\sin v$$
$$z = a\ln\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi].$$

222. Napisati parametarske jednadžbe torusa koji nastaje rotacijom kruga radiusa r oko pravca koji leži u ravnini toga kruga na udaljenosti $R\,(R>r)$ od njegova središta.

Neka torus nastaje rotacijom kruga

$$(y-R)^2 + z^2 = r^2, \quad (R>r)$$

oko osi OZ.

Tada je implicitna jednadžba torusa (vidi sl. 42):

$$(\sqrt{y^2+x^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Parametarske jednadžbe dobit ćemo stavimo li:

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$

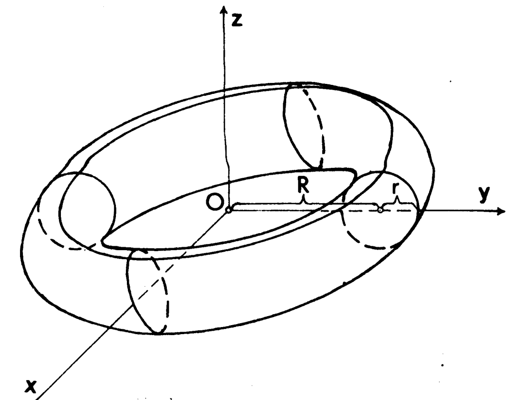
što daje

$$(u-R)^2 + z^2 = r^2$$

ili

$$z = \sqrt{r^2-(u-R)^2}.$$

Parametarske jednadžbe torusa prema tome glase:



Sl. 42.

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = \sqrt{r^2-(u-R)^2}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi],$$

a vektorska:

$$\vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ \sqrt{r^2-(u-R)^2}\}, \qquad (R>r).$$

Još jedan oblik parametarskih odnosno vektorske jednadžbe torusa dobit ćemo stavimo li u prethodne parametarske jednadžbe, tj. u jednadžbu:

$$z = \sqrt{r^2-(u-R)^2}$$

da je:

$$(u-R)^2 = r^2\cos^2 u',$$

pa je tada

$$u = R + r\cos u',$$

gdje je u' novi parametar.

Tada imamo parametarske jednadžbe torusa s novim parametrom u':

$$x = (R + r\cos u')\cos v$$
$$y = (R + r\cos u')\sin v$$
$$z = r\sin u' \qquad (R > r), \qquad u', \qquad v \in [0,2\pi],$$

odnosno vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = \{(R + r\cos u')\cos v, \qquad (R + r\cos u')\sin v, \quad r\sin u'\}, \qquad (R > r),$$

što je u skladu i sa zadatkom 215.

223. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \{u\cos v, \quad u\sin v, \quad \sqrt{a^2 - u^2}\} \qquad u \in [-a, a], \qquad v \in [0, 2\pi],$$

gdje su u i v nezavisni parametri plohe, a »a« konstanta.

1° Napisati jednadžbu plohe u obliku $F(x, y, z) = 0$ i na osnovu toga zaključiti koja je to ploha.

2° Što su koordinatne u i v krivulje?

3° Kakvo je geometrijsko značenje parametara u i v?

1° Eliminacijom parametara u i v iz jednadžbi:

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = \sqrt{a^2 - u^2}$$

dobijemo jednadžbu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad (z > 0).$$

Ploha je gornja polusfera radiusa a.

2° $u = c$, v krivulja predstavlja krugove na sferi ($x = c\cos v$, $y = c\sin v$) na udaljenosti $z = \sqrt{a^2 - c^2}$ od ravnine XOY. Ti krugovi su paralele. Kako je $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} v$, to su koordinatne u krivulje ($v = c$), veliki polukrugovi po kojima ravnine $y = x\operatorname{tg} c$ sijeku polusferu. To su meridijani.

3° u je udaljenost točke (u, v) na polusferi od osi OZ, a v je njena geografska dužina.

224. Zadana je ploha S parametrizacijom $D \to E^3$:

$$x = a\cos^4 u\cos^4 v, \qquad y = a\cos^4 u\sin^4 v$$
$$z = a\sin^4 u, \qquad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi, \pi].$$

Napisati njenu implicitnu jednadžbu.

225. Pokazati da jednadžbe

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \qquad z = \frac{1}{u^2 + v^2}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in \mathbf{R}$$

i

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = u^2, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi],$$

predstavljaju parametarske jednadžbe iste plohe.

226. Pokazati da se parametarske jednadžbe jednoplošnog hiperboloida mogu napisati u obliku:

$$x = a\,\frac{uv + 1}{u + v}, \qquad y = b\,\frac{u - v}{u + v}, \qquad z = \frac{uv - 1}{u + v}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in \mathbf{R}.$$

Kakve su koordinatne krivulje plohe za tu parametrizaciju?

U zadacima od 227. do 233. napisati parametarske jednadžbe sljedećih ploha drugog reda:

227. elipsoida: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$

228. eliptičkog paraboloida: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z,$

229. jednoplošnog hiperboloida: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$

230. dvoplošnog hiperboloida $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1,$

231. eliptičkog valjka: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$

232. stošca: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{c^2},$

233. hiperboličkog paraboloida: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$

234. Zadana je ploha:

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = uv, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in \mathbf{R}.$$

Ispitati koja je to ploha i provjeriti leže li na njoj točke $A = (4, 2, 3)$ i $B = (1, 4, -2)$.

U zadacima od 235. do 237. odrediti koordinatne krivulje na plohi:

235. $x = u, \qquad y = v, \qquad z = u; \qquad u, v \in \mathbf{R}$

236. $x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = 0; \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi]$

237. $x = \cos u\operatorname{ch} v, \qquad y = \sin u\operatorname{sh} v, \qquad z = 0; \qquad u \in [0, 2\pi], \qquad v \in \mathbf{R}.$

238. Naći singularnu krivulju na pseudosferi:

$$x = \sin u\cos v, \qquad y = \sin u\sin v, \qquad z = \cos u + \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2};$$
$$u \geqslant 0, \qquad v \in [0, 2\pi].$$

(Singularna krivulja na plohi je ona, čije su sve točke singularne točke plohe.)

239. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \{\cos u \cos v,\ \cos u \sin v,\ \sin u\}, \qquad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad v \in [-\pi, \pi]$$

1° Napisati jednadžbu plohe u obliku $F(x, y, z) = 0$ i zaključiti koja je to ploha.
2° Što su koordinatne krivulje tog predočenja plohe?
3° Kakvo je geometrijsko značenje parametara u i v?

240. Ploha S dana je jednadžbom:

$$\vec{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ f(u)\}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi],$$

gdje su u i v nezavisni parametri, a $f(u)$ dana realna funkcija.
1° Pomoću koordinatnih krivulja tog predočenja zaključiti koja je to ploha.
2° Napisati jednadžbu te plohe u obliku $z = f(x, y)$.

241. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \{e^{av} f(u) \cos(u+v),\ e^{av} f(u) \sin(u+v),\ e^{av} g(u)\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

$f(u)$ i $g(u)$ proizvoljne funkcije.
Pokazati da koordinatne krivulje $u = c$ leže na stošcu

$$x^2 + y^2 = \frac{f^2(c)}{g^2(c)} z^2.$$

U zadacima 242. i 243. objasniti koja je ploha zadana sljedećim jednadžbama:

242. $\vec{r} = \{(a + b\cos u)\cos v,\ (a + b\cos u)\sin v,\ b \sin u\}, \qquad a > b,$
$u, v \in [0, 2\pi]$.

243. $\vec{r} = \left\{\frac{1}{c}\sqrt{c^2+u^2}\cos v,\ \frac{1}{c}\sqrt{c^2+u^2}\sin v, u\right\}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi].$

244. Naći parametarske jednadžbe ravnine $x - 3y + 2z - 9 = 0$.

Rješenja

224. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$.

225. Rotacioni paraboloid: $z = x^2 + y^2$.

226. Čine pravolinijsku mrežu.

227. $x = a \sin u \cos v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos u, \quad u \in [0, \pi],\ v \in [-\pi, \pi]$.

228. $x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = u^2, \quad u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$.

229. $x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = b \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$.

230. $x = a \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = b \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = c \operatorname{ch} u,\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$,

231. $x = a \cos v, \quad y = b \sin v, \quad z = u,\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$,

232. $x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = cu,\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$,

233. $x = au \operatorname{ch} v, \quad y = bu \operatorname{sh} v, \quad z = \frac{1}{2} u^2, \quad u, v \in \mathbf{R}$.

234. Ploha je hiperbolički paraboloid $x^2 - y^2 = 4z$, A – leži, B – ne leži.

235. Dvije familije paralelnih pravaca obje paralelne s koordinatnim osima.

236. Zrake koje izlaze iz ishodišta, i familija koncentričnih kružnica sa središtem u ishodištu.

237. Krivulje $v = \text{const.}$ – familija elipsi s istim fokusima i odrezak $[-1, 1]$ na osi OX; krivulj $u = \text{const.}$ – familija hiperbola istih fokusa i odresci $(-\infty, -1]$ i $[1, \infty)$ na osi OX.

238. $u = \frac{\pi}{2}$.

239. 1° $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, što je sfera. 2° $u = c$ su paralele, tj. krugovi na sferi u udaljenosti $z = \sin c$ o ravnine XOY. $v = c$ su meridijani, tj. veliki krugovi na sferi koji nastaju kao presjek sfere i ravnin $y = x \operatorname{tg} c$. 3° u i v su geografske koordinate.

240. $u = c$ predstavlja krugove sa središtem na osi OZ. Ploha je prema tome rotaciona, a nastaj rotacijom krivulje $z = f(x)$, $y = 0$, oko osi OZ. 2° $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

241. eliminirati parametar v.

242. Prema zad. 215. i 222. to je rotaciona ploha koja nastaje rotacijom krivulje $x = a + b\cos u$, $y = 0$ $z = b \sin u$, $u \in [0, 2\pi]$, dakle, kružnice $(x-a)^2 + z^2 = b^2$, oko osi OZ. Ploha je prema tome torus s jednadžbom $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$.

243. Prema zad. 215. to je ploha nastala rotacijom krivulje:

$$x = \frac{1}{c}\sqrt{u^2 + c^2}, \ y = 0, \ z = u, \text{ dakle hiperbole } x^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

oko osi OZ. Ploha je, dakle, rotacioni jednoplošni hiperboloid s jednadžbom:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

244. $x = 1 + 2u - 2v, \quad y = 2 + 3u + 4v, \quad z = 4 + 9u + 5v, \quad u, v \in \mathbf{R}$.

§3. Krive linije na površi

Neka je površ data jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. *Tada je prva osnovna forma* F_1 *površi odredjena sa*

$$F_1 = ds^2 = (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (d\vec{r})^2 ,$$

gde je $\quad d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv$.

Može se pisati da je

$$F_1 = E\,du^2 + 2F du dv + G dv^2 ,$$

$$E = (\vec{r}_u')^2 , \quad F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v'), \quad G = (\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v').$$

Jedinični vektor normale površi je odredjen sa

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\sqrt{EG-F^2}} .$$

Druga osnovna forma površi je

$$F_2 = (d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_o) = -(d\vec{r} \cdot d\vec{n}_o) = L\,du^2 + 2M du dv + N dv^2 ,$$

gde je

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu} du^2 + 2\vec{r}''_{uv} du\,dv + \vec{r}''_{vv} dv^2 .$$

Neka je K *krivina površi u tački* (u,v) *u pravcu* (du,dv), *a* $R = \frac{1}{K}$ *poluprečnik krive* c *dobivene normalnim presekom površi u tom*

pravcu. Tada je

$$K = \frac{1}{R} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} .$$

Podelivši i brojitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 *dobijamo* K *kao funkciju od* u,v *i* $\frac{du}{dv}$:

$$K = f(u,v, \frac{du}{dv}) .$$

Pravci za koje K *ima maksimalnu i minimalnu vrednost u fiksiranoj tački* (u,v) *zovu se glavni pravci u toj tački. Mogu se dobiti kao rešenja jednačine*

$$K_x' = 0 \qquad \text{gde je} \qquad x = \frac{du}{dv} .$$

Glavnim pravcima odgovaraju glavne krivine, i one mogu biti odredjene i kao koreni jednačine

(a) $\quad (EG-F^2)K^2 - (EN-2FM+GL)K + (LN-M^2) = 0$.

Ako su K_1 *i* K_2 *glavne krivine, tada su* $R_1 = \frac{1}{K_1}$ i $R_2 = \frac{1}{K_2}$ *glavni poluprečnici.* $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ *zove se srednja krivina, a* $K_1 K_2$ *se zove Gaussova krivina površi. Iz jednačine (a) imamo*

$$K_1 K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} , \quad K_1 + K_2 = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} .$$

Gaussova krivina površi se može izračunati i preko formule

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Ako su x_1 *i* x_2 *rešenja jednačine* $K_x' = 0$, *to je*

$$x_1 = \left(\frac{du}{dv}\right)_1 = f_1(u,v)$$

$$x_2 = \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = f_2(u,v) .$$

Integralne krive gornjih diferencijalnih jednačina su linije krive. Ako je u nekoj tački $K_x' \equiv 0$, *tada je svaki pravac glavni* *pravac, tj. normalna krivina je ista za svaki pravac u toj tački, i ta tačka se zove pupčasta tačka površi.*

Kako je

$$K = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G} \quad , \quad x = \frac{du}{dv} \quad ,$$

to je $K'_x = 0$ *za ono* x *koje je rešenje jednačine*

$$(FL-ME)x^2 + (GL-NE)x + (GM-FN) = 0 \ ,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Posle množenja prve vrste sa dv^2 *dobijamo*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu linije krivine.

Koristeći Rodrigovu formulu koja kaže da je za glavne pravce, tj. za pravce u kojima je glavna krivina ekstramalna, imamo još i sledeće diferencijalne jednačine linije krive:

$$d\vec{n}_o = \lambda\, d\vec{r}$$

što povlači da je

$$d\vec{r} \cdot [\vec{n} \times d\vec{n}] = 0$$

Kako u prvoj aproksimaciji $\frac{1}{2} F_2$ *predstavlja rastojanje d tačke* $\vec{r}(u+du, v+dv)$ *od tangentne ravni površi povučene u tački* $\vec{r}(u,v)$, *to će biti istog znaka za svako* x, *tj. za svaki pravac* $\frac{du}{dv}$ *ako je diskriminanta kvadratnog trinoma*

(b) $\qquad Lx^2 + 2Mx + N$

negativna, tj. ako je $M^2 - LN < 0$ *i takva tačka površi se zove eliptična tačka. U okolini te tačke površ je sa iste strane tangentne ravni.*

Ako je diskriminanta od (b) pozitivna, tj. $M^2 - LN > 0$, *tada će postojati pravci* $\frac{du}{dv}$ *za koje je* $F_2 > 0$ *i takvi za koje je* $F_2 < 0$, *tj. površ će u toj tački biti sa razne strane tangentne ravni. Takva tačka se zove hiperbolična tačka površi. Pravci za koje je* $F_2 = 0$ *tj.* $Lx^2 + 2Mx + N = 0$ *zovu se asimptotski pravci u odredjenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ. Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi. Normalna krivina asimptotskih linija je nula. Dobijaju se kao integralne krive diferencijalne jednačine* $F_2 = 0$. *Iz svake hiperbolične tačke površi izlaze dve asimptotske linije.*

Ako je $M^2 - LN = 0$, *tada jednačina* $Lx^2 + 2Mx + N$ *ima jednu dvostruku nulu i postoji samo jedan pravac duž koje tangentna ravan dodiruje površ. Takva tačka površi zove se parabolična tačka površi.*

Ako glavna normala krive c_1 *zaklapa sa normalom površi ugao* θ, *tada je* (c_1 *leži na površi*)

$$R_1 = \pm R \cos\theta$$

gde je R_1 *poluprečnik krivine krive* c_1, *a* R *poluprečnik krivine krive* c, *koja se dobija normalnim presekom površi u tački krive* c_1 *i u pravcu iste. Oskulatorna ravan krive* c *sadrži tangentu krive* c_1 *i normalu površi. (*c *i* c_1 *imaju istu tangentu).*

Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z = 0$ *zove se linija najvećeg nagiba.*

Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.

Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

tj.

$$[\vec{r}_u' \times \vec{r}_v] \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}\ ] = 0\ .$$

§ 8. Prva diferencijalna forma plohe

8.1. Gaussove veličine prvoga reda

Neka je zadana ploha S svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}, \qquad (u, v) \in D. \tag{1}$$

Tada se za plohu S definiraju funkcije: $E, F, G : D \to \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{2}$$

$$G = \vec{r}_v^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Veličine E, F i G definirane sa (2) zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama prvoga reda* ili koeficijentima prve diferencijalne forme.

8.2. Duljina luka krivulje na plohi. Prva diferencijalna forma plohe

Ako je zadana krivulja α na plohi S sa:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\mathrm{u}(t), v(t)), \; t \in I$$

i ako su $\vec{r}(t_1)$ i $\vec{r}(t_2)$ radijvektori dviju njezinih točaka A i B onda je realan broj:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \tag{3}$$

duljina luka krivulje na plohi od točke A do točke B.

Promotrimo funkciju $s(t) : I \to \mathbf{R}$ za krivulju α na plohi S definiranu sa:

$$s(t) = \int_{a}^{t} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_{a}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

Tada jednadžbu (4) možemo pisati u diferencijalnom obliku ovako:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \equiv I \tag{5}$$

koji se zove *prva diferencijalna ili fundamentalna forma plohe*. Još se zove i metrička ili kvadratna forma plohe i označuje sa I.

Formom I određeno je mjerenje duljina krivulja na plohi. Kažemo da je formom I dana *metrika* na plohi.

8.3. Kut između dviju krivulja na plohi definira se kao kut između njihovih tangenata u presječnoj točki M

Neka su zadane krivulja α i β sa:

$$\alpha \ldots \vec{r}_1(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad \text{tj. } u = u(t),\; v = v(t)$$

$$\beta \ldots \vec{r}_2(t) = \vec{r}(\bar{u}(t), \bar{v}(t)), \quad \text{tj. } u = \bar{u}(t),\; v = \bar{v}(t)$$

tada su njihovi tangentni vektori dani s:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{r}_u\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\frac{dv}{dt},$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{r}_u\frac{d\bar{u}}{dt} + \vec{r}_v\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Kut ω između dviju krivulja na plohi u presječnoj točki M jednak je tada:

$$\cos\omega = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_1|\,|d\vec{r}_2|} = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{\sqrt{d\vec{r}_1^{\,2}}\sqrt{d\vec{r}_2^{\,2}}}, \text{ tj.}$$

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,d\bar{u}^2 + 2F\,d\bar{u}\,d\bar{v} + G\,d\bar{v}^2}}, \tag{6}$$

gdje su:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\,du + \vec{r}_v\,dv,$$

$$d\vec{r}_1 = \vec{r}_u\,d\bar{u} + \vec{r}_v\,d\bar{v},$$

Napomena: Gaussove veličine E, F, G u (6) računamo u točki M.

Specijalni slučajevi:

a) Kut između krivulje na plohi i u-krivulje dan je izrazom (tada je β u-krivulja, tj. $\bar{v} = \text{const.}$, $d\bar{v} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

b) Kut između krivulje na plohi i v-krivulje dan je izrazom (tada je β v-krivulja, tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + G\,dv}{\sqrt{G}\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

c) Kut između koordinatnih u i v-krivulja dan je izrazom (tada je krivulja α u-krivulja, tj. $v = \text{const.}$, $dv = 0$, a krivulja β v-krivulja tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

d) Ako su krivulje α i β na plohi međusobno okomite, tada je:

$$E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v} = 0.$$

e) Uvjet okomitosti koordinatnih u i v krivulja prema c) glasi:

$$F = 0.$$

8.4. Ploština omeđenog dijela plohe

Neka je dana ploha S svojom jednadžbom $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ i na njoj zatvoreno područje (K). Tada je ploština područja (K) jednaka:

$$S=\iint_{(K)} dS=\iint_{D} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv=\iint_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv, \tag{7}$$

gdje je D zatvoreno područje u ravnini takvo da je $\vec{r}(D)=(K)$.
Ovdje, naime, vrijedi (vidi zad. 2):

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2=\vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2-(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2=EG-F^2. \tag{8}$$

Izraz:

$$EG-F^2=W^2 \tag{9}$$

koji je uvijek pozitivan zove se *diskriminanta prve diferencijalne forme* ili Weingartenova funkcija.

Uvjet (6) iz § 6, tj. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ sada postaje $EG-F^2 \neq 0$.

Jedinični vektor normale iz § 7.1. sada glasi:

$$\vec{N}^0=\frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{10}$$

§ 9. Druga diferencijalna forma

9.1. Druga diferencijalna ili kvadratna forma plohe

Neka je ploha S zadana svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v)=x(u, v)\vec{i}+y(u, v)\vec{j}+z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D.$$

Tada se na plohi S definiraju funkcije $L, M, N: D \rightarrow \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
L&=\vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uu}=\frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\right),\\
M&=\vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uv}=\frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\right),\\
N&=\vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{vv}=\frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

odnosno koordinatno:

$$\begin{aligned}
L&=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}\\
M&=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}\\
N&=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1*}$$

Funkcija L, M i N zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama drugog reda* ($W = \sqrt{EG - F^2}$).

a) Neka je nadalje zadana krivulja α na plohi S svojim jednadžbama $u = u(s)$, $v = v(s)$, tj.

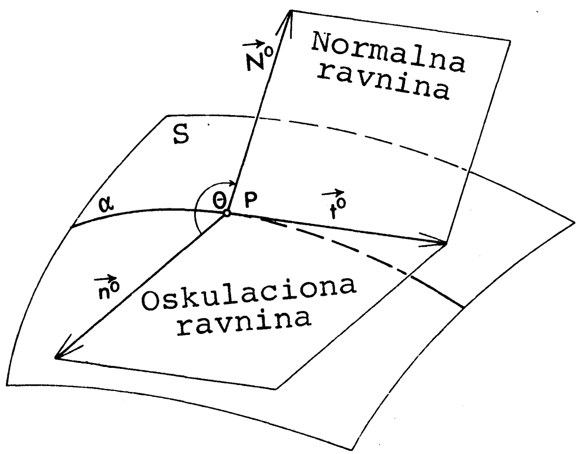
$$\vec{r} = \vec{r}[u(s), \; v(s)], \tag{2}$$

gdje je s duljina luka krivulje α. Tada vrijedi:

$$\vec{N}^0 \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \varkappa \cos\theta, \tag{3}$$

gdje je $\varkappa$ zakrivljenost krivulje α u nekoj točki P, θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P (sl. 44).

Relacija (3) dade se napisati u obliku:



Sl. 44.

$$\varkappa \cos\theta = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \equiv \mathrm{II}. \tag{4}$$

Desna strana izraza (4) zove se *druga diferencijalna ili druga kvadratna forma plohe* i označuje s II.

b) Ako je krivulja α na plohi umjesto parametrom s parametrizirana nekim parametrom λ, koji nije duljina luka,

$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(u(\lambda), v(\lambda))$, onda relacija (4) prelazi u:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + N\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}{E\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + G\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}, \tag{5}$$

odnosno:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \equiv \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{6}$$

Desna strana izraza (6) je kvocijent druge i prve diferencijalne forme plohe.

9.2. Normalni i kosi presjek plohe

Ravnina koja prolazi jednim pravcem tangentne ravnine, tj. smjerom $\vec{t}^0$ ili $\frac{du}{dv}$ i normalom $\vec{N}^0$ na plohu u točki P plohe S siječe ovu plohu u ravninskoj krivulji γ koja se zove *normalni presjek plohe S u točki P u smjeru vektora* t^0.

Svaka druga ravnina koja prolazi istim pravcem (tj. smjerom $\vec{t}^0$) ali ne normalom $\vec{N}^0$ plohe S, siječe ovu plohu u krivulji koja se zove *kosi presjek*.

9.3. Normalna zakrivljenost plohe u danom smjeru

To je zakrivljenost K_n normalnog presjeka u tom smjeru. Normalnoj zakrivljenosti pridružujemo predznak na ovaj način: kut $\theta = 0$ ili π, jer su vektori $\vec{n}^0$ i $\vec{N}^0$ glavne normale normalnog presjeka i normale na plohu kolinearni (istog ili suprotnog smjera). Pri tome uzimamo da je $K_n > 0$ ako je normalni presjek u točki P plohe S zakrivljen prema vektoru $\vec{N}^0$ normale na plohu, a $K_n < 0$ ako je on zakrivljen od vektora $\vec{N}^0$. Pokazuje se da je normalna zakrivljenost u smjeru $\frac{du}{dv}$ dana izrazom (prema (5) ili (6)):

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{7}$$

9.4. Meusnierov teorem

Ovaj teorem povezuje zakrivljenost K_n normalnog i $\varkappa$ kosog presjeka i dan je relacijom:

$$K_n = \varkappa \cos\theta, \tag{8}$$

gdje je θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P plohe sa zajedničkom tangentom.

Odavde proizlazi da od svih krivulja na polohi koje prolaze jednom točkom i imaju zajedničku tangentu najmanju zakrivljenost u toj točki ima normalni presjek plohe.

Zakrivljenost plohe definira se pomoću zakrivljenosti krivulja na plohi.

$\frac{1}{K_n}$ i $\frac{1}{\varkappa}$ zovu se radiusi zakrivljenosti normalnog i kosog presjeka.

Zadana je sfera svojom parametrizacijom

$$\vec{r} = (r\sin u\cos v,\ r\sin u\sin v,\ r\cos u),\quad u\in[0,\pi],\ v\in[-\pi,\pi].$$

Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.

Rj. Pronađimo prvo Gausove fundamentalne veličine prvog reda, E, F i G. ($E=\dot{\vec{r}}_u^{\,2}$, $F=\dot{\vec{r}}_u\cdot\dot{\vec{r}}_v$, $G=\dot{\vec{r}}_v^{\,2}$).

$$\dot{\vec{r}}_u = (r\cos u\cos v,\ r\cos u\sin v,\ -r\sin u)$$
$$\dot{\vec{r}}_v = (-r\sin u\sin v,\ r\sin u\cos v,\ 0)$$

$$E=\dot{\vec{r}}_u^{\,2} = (r\cos u\cos v)^2+(r\cos u\sin v)^2+(-r\sin u)^2$$
$$= r^2(\underline{\cos^2 u}\cos^2 v+\underline{\cos^2 u}\sin^2 v+\sin^2 u) =$$
$$= r^2(\cos^2 u+\sin^2 u) = r^2$$

$$F=\dot{\vec{r}}_u\cdot\dot{\vec{r}}_v = -r^2\sin u\cos u\sin v\cos v + r^2\sin u\cos u\sin v\cos v + 0 = 0$$
$$G=\dot{\vec{r}}_v^{\,2} = \underline{r^2\sin^2 u}\sin^2 v+\underline{r^2\sin^2 u}\cos^2 v = r^2\sin^2 u$$

Prva fundamentalna forma plohe $I = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ sada glasi

$$I = r^2du^2+r^2\sin^2 u\,dv^2.$$

Ako promjenjive u i v zamjenimo sa ϕ i θ imamo

$$\vec{r} = (r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)$$
$$I = r^2d\phi^2+r^2\sin^2\phi\,d\theta^2$$

Naći prvu diferencijalnu formu ravnine u odnosu na parametrizaciju

$$x = x_0+l_1u+l_2v$$
$$y = y_0+m_1u+m_2v$$
$$z = z_0+n_1u+n_2v.$$

Rj. Odredimo prvo Gaussove fundamentalne veličine prvog reda:

$$E=\dot{\vec{r}}_u^{\,2},\quad \dot{\vec{r}}_u = (l_1, m_1, n_1)$$
$$E = l_1^2+m_1^2+n_1^2$$
$$F=\dot{\vec{r}}_u\cdot\dot{\vec{r}}_v,\quad \dot{\vec{r}}_v = (l_2,m_2,n_2),\quad F = l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$$
$$G=\dot{\vec{r}}_v^{\,2} = l_2^2+m_2^2+n_2^2$$

Prva fundamentalna forma je oblika

$$I = (l_1^2+m_1^2+n_1^2)du^2+(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)du\,dv+(l_2^2+m_2^2+n_2^2)dv^2$$

Ako su parametarske u i v crte zadane jediničnim vektorima, tada je

$$I = du^2+2\cos\omega\,du\,dv+dv^2$$

gdje je ω ugao između pravaca u i v.

Ako su još pravci u i v međusobno okomiti, tada je prva diferencijalna forma

$$I = du^2+dv^2 \quad \text{ili} \quad I = dx^2+dy^2$$

Ako je još xOy ravan parametarizirana polarnim koordinatama

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=0 \quad \text{tada} \quad dx = \cos\varphi\,d\rho-\rho\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,d\rho+\rho\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} dx^2 &= \cos^2\varphi\,d\rho^2-2\rho\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\,d\varphi^2\\ dy^2 &= \sin^2\varphi\,d\rho^2+2\rho\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi+\rho^2\cos^2\varphi\,d\varphi^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow I = d\rho^2+\rho^2d\varphi^2$$

Prisjetimo se $f = \eta(u,v)$

$$df = \frac{\partial \eta}{\partial u} du + \frac{\partial \eta}{\partial v} dv$$

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial \eta}{\partial u} du + \frac{\partial \eta}{\partial v} dv\right)$$

$$df^2 = df \cdot df$$

(7) Naći prvu diferencijalnu formu rotacione plohe

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u)$$

gdje je os rotacije os Oz.

Rj. Odredimo prvo Gausove fundamentalne veličine prvog reda

$$\dot{\vec{r}}_u = (f'\cos v,\ f'\sin v,\ g')$$

$$\dot{\vec{r}}_v = (-f(u)\sin v,\ f\cos v,\ 0)$$

$$E = \dot{\vec{r}}_u^{\,2} = f'^2\cos^2 v + f'^2\sin^2 v + g'^2 = f'^2 + g'^2$$

$$F = \dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v = -ff'\sin v\cos v + ff'\sin v\cos v + 0 = 0$$

$$G = \dot{\vec{r}}_v = f^2\sin^2 v + f^2\cos^2 v + 0 = f^2$$

Prva diferentijalna forma je

$$ds^2 = (f'^2 + g'^2)\,du^2 + f^2 dv^2$$

Napomenimo da koordinatne krive u i v ove rotacione plohe čine ortogonalnu mrežu jer je $F=0$

Naći prvu diferencijalnu formu plohe zadane eksplicitnom jednačinom $z=z(x,y)$.

Rj. Posmatrajmo proizvoljnu tačku $M(x_1,y_1,z_1)$ ove plohe. Za proizvoljne vrijednosti x_1 i y_1 dobijemo tačku $z_1=z(x_1,y_1)$. Prema tome, vektorska jednačina plohe bi glasila:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z(x,y)\vec{k}.$$

Izračunajmo Gaussove fundamentalne veličine prvog reda

$$E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right)^2=1^2+0^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=1\cdot 0+0\cdot 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad G=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right)^2=0^2+1^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Ako uvedemo oznake $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ i $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ imamo:

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2.$$

Prva diferencijalna forma plohe glasi

$$ds^2=E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2$$

odnosno

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2.$$

Zadana je ploha

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{a}+\sin u\,\vec{b}+v\vec{c},\qquad u,v\in\mathbb{R}$$

gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zadani vektori.

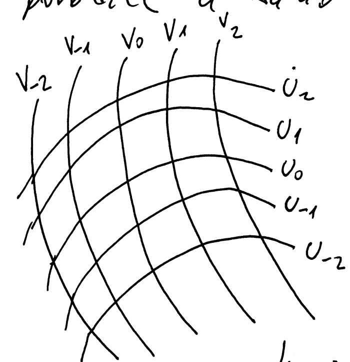
a) Ispitati što su koordinatne krivulje.

b) Odrediti koeficijente E, F i G prve kvadratne forme

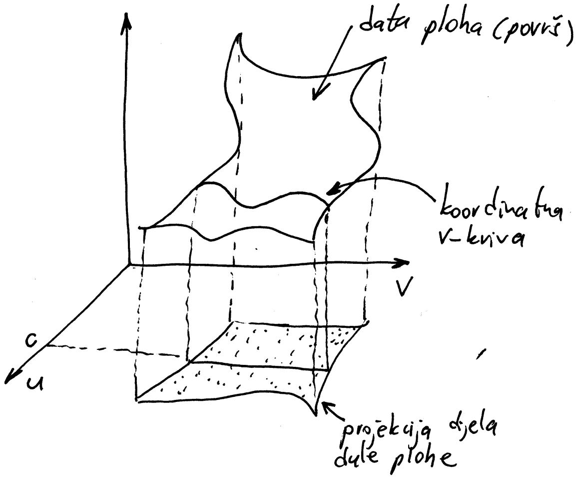
c) Kada će se koordinatne krive ove plohe sjeći ortogonalno?

d) Naći element površine dS dane plohe.

Rj. Znamo da su koordinate brojevi uzeti u određenom redu i koji određuju položaj tačke na liniji, u ravni, na površi ili u prostoru. Zavisno od cilja i karaktera ispitivanja ovog ili onog objekta biraju se različiti koordinatni sistemi, pomoću kojih se svakoj tački prostora koordinira određen skup brojeva – koordinatne tačke. Na primjer, u nekoj oblasti ravni ili u cijeloj ravni se razmatraju dvije porodice linija $U(M)=\text{const.}$ i $V(M)=\text{const.}$, takve da se linije iste porodice ne sijeku među sobom, a svaka linija jedne porodice se siječe sa svakom linijom druge porodice u samo jednoj tački M. Brojevi $U(M)$ i $V(M)$ su onda koordinate tačke M u ravni.



Ako su linije $U=\text{const.}$ i $V=\text{const.}$ prave, sistem koordinata se naziva pravolinijski koordinatni sistem. Ako je jedna od linija porodica $U=\text{const}$ ili $V=\text{const}$, ili ako su obe linije krive linije, koordinatni sistem se naziva krivolinijski ili Gaussov koordinatni sistem.



U našem slučaju postoje dvije koordinatne krive

a) v-kriva (v-krivulja)

b) u-kriva

Koordinatne v-krive dobijemo kada za u stavimo neku konstantu

$u=u_0=const.$

$\vec r = \underbrace{u_0\vec a + \vec b \sin u_0}_{=\vec r_0} + v\vec c$

koordinatna v-kriva

prava paralelna sa $\vec c$

Koordinatne u-krive dobijemo kada za v stavimo nek. konst.

$v=v_0=const$

$\vec r = u\vec a + \sin u\,\vec b + v_0\vec c$

koordinatne u-krive

kosa sinusoida u ravni ‖ ravni odred. sa vektorima $\vec a$ i $\vec b$

b) Gausove fundamentalne veličine prvog reda

$E=\left(\frac{\partial\vec r}{\partial u}\right)^2 = (\vec a+\vec b\cos u)^2$

$F=\frac{\partial \vec r}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec r}{\partial v} = \vec c\cdot\vec a + \vec c\cdot\vec b\cos u$

$\frac{\partial\vec r}{\partial v}=\vec c$, $G=\vec c^{\,2}$

c) $F=0$ je uslov okomitosti koordinatnih u i v krivih tj.

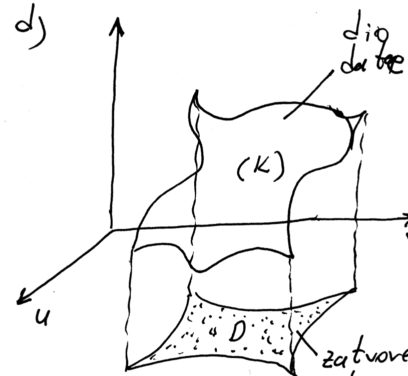
$\vec c\cdot\vec a+\vec c\cdot\vec b\cos u=0$ i ovo treba da vrijedi za $\forall u$,

Odavde možemo vidjeti da će ova jednakost biti zadovoljena (i dovoljno je) za $\vec c\cdot\vec a=0$ i $\vec c\cdot\vec b=0$ tj. kada je

$\vec c\perp\vec a$ i $\vec c\perp\vec b \Rightarrow \vec c=k(\vec a\times\vec b)$

Za $\vec c=k(\vec a\times\vec b)$ koordinatne krive će se sijeći ortogonalno.

d)



Površina područja (K) se računa po formuli

$$P=\iint_{(K)} dS = \iint_D |\vec r_u'\times\vec r_v'|\,du\,dv = \iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

U ovom slučaju mi tražimo element površine dS.

$dS=|\vec r_u'\times\vec r_v'|\,du\,dv$

$\vec r_u'=\vec a+\vec b\cos u$

$\vec r_v'=\vec c$

$dS=|(\vec a+\vec b\cos u)\times\vec c|\,du\,dv = |(\vec a\times\vec c)+(\vec b\times\vec c)\cos u|\,du\,dv$

Ako su koordinatne krive međusobno ortogonalne, tada je $F=0$, pa je

$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sqrt{EG}\,du\,dv$

$=k\sqrt{(\vec a+\vec b\cos u)^2(\vec a\times\vec b)^2}\,du\,dv$

Naći ugao pod kojim se sijeku krive $x = x_0$, $y = y_0$ na plohi $z = axy$.

Rj. Ploha $z = axy$ ima vektorsku jednačinu

I način: $\vec{r} = (x, y, axy)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ako uvrstimo za $x = x_0$ i $y = y_0$ u $\vec{r}$ dobićemo koordinatne krive, koje imaju jednačine

$$\vec{r}_1 = (x_0, y, ax_0y)$$

$$\vec{r}_2 = (x, y_0, axy_0)$$

Tangentni vektori tih krivih su

$$\frac{d\vec{r}_1}{dy} = (0, 1, ax_0), \qquad \frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 0, ay_0)$$

pa je ugao između njih dan sa

$$\cos\omega = \frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\sqrt{1+a^2y_0^2}}$$

II način:

Ugao ω možemo odrediti i na drugi način: on se, naime, podudara sa uglom između koordinatnih krivih, a taj je dat formulom

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Kako je $E = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right)^2 = 1 + a^2y^2$, $F = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = a^2xy$, $G = 1 + a^2x^2$

Koordinatne krive se sijeku u tački (x_0, y_0) pa je

$$\cos\omega = \frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2y_0^2}\sqrt{1+a^2x_0^2}}$$

Na plohi (sfera):

$$\vec{r} = (a\cos v\sin u, a\sin v\sin u, a\cos u), \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi],$$

zadane su dvije krive C_1 i C_2 sa $C_1: u = v$ i $C_2: \bar{u} + \bar{v} = \frac{\pi}{2}$.

a) Naći presječne tačke datih krivih

b) Odrediti ugao pod kojim se date krive sijeku.

Rj.

a) Dvije date krive imaju jednačine

$$C_1: \vec{r}_1 = (a\cos u\sin u, a\sin^2 u, a\cos u)$$

$$C_2: \vec{r}_2 = (a\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2} - \bar{u})}_{\cos\frac{\pi}{2}\cos\bar{u} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\bar{u}}\sin\bar{u}, a\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2} - \bar{u})}_{=\sin\frac{\pi}{2}\cos\bar{u} - \sin\bar{u}\cos\frac{\pi}{2}}\sin\bar{u}, a\cos\bar{u})$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{umjesto } \bar{u} \\ \text{možemo} \\ \text{pisati } u\end{matrix}\right| = (a\sin^2 u, a\sin u\cos u, a\cos u)$$

Presječne tačke od C_1 i C_2 su za one vrijedn. u za koje vrijedi

$$a\cos u\sin u = a\sin^2 u$$

$$a\sin^2 u = a\sin u\cos u$$

$$a\cos u = a\cos u$$

$$a\cos u\sin u = a\sin^2 u$$

$$a\sin u(\cos u - \sin u) = 0$$

$$\sin u = 0, \quad \text{ili} \quad \cos u - \sin u = 0$$

$$u_1 = 0 \text{ ili } u_2 = \pi \quad \text{ili} \quad u = \frac{\pi}{4}$$

Presječne tačke dvije date krive su

$M_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ za $u = \frac{\pi}{4}$,

$M_2(0, 0, a)$ za $u = 0$ i

$M_3(0, 0, -a)$ za $u = \pi$.

b) ugao pod kojim se dvije date krive sijeku ćemo naći na dva načina

I način

Traženi ugao je jednak uglu između njihovih tangenata u presječnim tačkama krivih. Tangente na zadane krive imaju smjer

$$\frac{d\vec{r}_1}{du} = (a\cos^2 u - a\sin^2 u,\ a\sin u\cos u,\ -a\sin u)$$

$$= (a\cos 2u,\ a\sin 2u,\ -a\sin u)$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{du} = (a\sin 2u,\ a\cos 2u,\ -a\sin u)$$

Znamo da je

$$\frac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_2}{du} = \left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right|\cos\sphericalangle\left(\frac{d\vec{r}_1}{du},\frac{d\vec{r}_2}{du}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})}$$

$$\cos\omega = \frac{\frac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_2}{du}}{\left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\cdot\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right|} = \frac{a^2\sin 2u\cos 2u + a^2\sin 2u\cos 2u + a^2\sin^2 u}{\sqrt{a^2\cos^2 2u + a^2\sin^2 2u + a^2\sin^2 u}\ \sqrt{a^2\sin^2 2u + a^2\cos^2 2u + a^2\sin^2 u}}$$

$$\cos\omega = \frac{\sin 4u + \sin^2 u}{1+\sin^2 u}$$

Za $u=\frac{\pi}{4}$ traženi ugao je $\cos\omega = \frac{0+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ tj. $\omega = \arccos\frac{1}{3}$.

U tačkama M_2 i M_3 krive se sijeku pod pravim uglom.

Napomenimo, da u sve tri tačke egzistiraju tangente na obe krive, jer su sve tri tačke regularne tačke krive.

$$\boxed{\text{Regularne tačke krive } \vec{r}=\vec{r}(t) \text{ su one tačke za koje je } \dot{\vec{r}}(t)\neq 0.}$$

II način

Ugao ω između dvije krive na plohi u presječnoj tački M (gdje je M regularna tačka parametrizacije tj. tačka u kojoj je $EG-F^2\neq 0$) se računa po formuli

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ \sqrt{E\,d\bar{u}^2 + 2F\,d\bar{u}\,d\bar{v} + G\,d\bar{v}^2}}$$

U jednom od prethodnih zadataka već smo računali Gaussove fundamentalne veličine prvog reda i dobili da je

$$E = a^2,\quad F=0,\quad G = a^2\sin^2 u$$

$$EG-F^2 = a^4\sin^2 u$$

Za M_1 imamo da je $u=\frac{\pi}{4}$ tj. $EG-F^2 = \frac{a^2}{2}\neq 0$.

Za M_2 imamo da je $u=0$ tj. $EG-F^2=0$

Za M_3 imamo da je $u=\pi$ tj. $EG-F^2=0$.

Odavde vidimo da je samo M_1 regularna tačka parametrizacije (razlikujmo pojmove regularna tačka parametrizacije i regularna tačka krive).

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2+G\,dv^2}\ \sqrt{E\,d\bar{u}^2+G\,d\bar{v}^2}} = \left|\begin{array}{l} M_1: \\ \text{za } u=\frac{\pi}{4} \quad G=\frac{a^2}{2} \\ v=u \Rightarrow dv=du \\ \bar{v}=\frac{\pi}{2}-\bar{u} \Rightarrow d\bar{v}=-d\bar{u} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{a^2\,du\,d\bar{u} - \frac{a^2}{2}\,du\,d\bar{u}}{\sqrt{a^2du^2+\frac{a^2}{2}du^2}\ \sqrt{a^2d\bar{u}^2+\frac{a^2}{2}d\bar{u}^2}} = \frac{a^2(1-\frac{1}{2})\,du\,d\bar{u}}{a\,du\sqrt{1+\frac{1}{2}}\ a\,d\bar{u}\sqrt{1+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

U tački M_1 traženi ugao je $\omega = \arccos\frac{1}{3}$.

U tačkama M_2 i M_2 ne možemo tražiti ugao između dvije krive jer su to singularne tačke krive.

U singularnim tačkama parametarske mreže plohe, ugao između dvije krive na plohi potražit ćemo direktno kao na prvi način (tj. neovisno o plohi). Može se također odabrati i druga parametrizacija za koju te tačke nisu singularne.

Odrediti izraz za površinu zatvorenog područja (K) na plohi: $z=z(x,y)$.

Rj. Jednačina plohe ima vektorsku jednačinu

$$\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z(x,y)\vec{k}.$$

Kako je
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = (1,0,z'_x)$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = (0,1,z'_y)\ ,$$

Ako uvedemo oznaku $p=z'_x$ i $q=z'_y$ Gausove fundamentalne veličine prvog reda su

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2$$

$$P=\iint_{(K)} dS = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$EG-F^2=(1+p^2)(1+q^2)-p^2q^2=1+p^2+q^2$$

Prema tome površinu zatvorenog područja (K) možemo izračunati po formuli

$$P=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

dvostruki integral

gdje je D područje u ravni xOy za koje je $\vec{r}(D)=(K)$

(istu formulu smo imali u Analizi III kod primjene površinskog integrala I vrste).

(#) Naći površinu četverougla na helikoidu

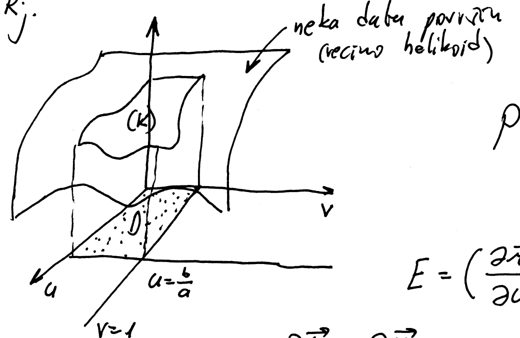
$x = au\cos v$

$y = au\sin v$

$z = bv, \quad u,v \in R$

ograničenog krivima $u=0$, $u=\frac{b}{a}$, $v=0$, $v=1$.

Rj.



$$P = \iint\limits_{(K)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + 0 = a^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (a\cos v, a\sin v, 0)(-au\sin v, au\cos v, b)$$
$$= -a^2u\sin v\cos v + a^2u\sin v\cos v + 0 = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = a^2u^2\sin^2 v + a^2u^2\cos^2 v + b^2 = a^2u^2 + b^2$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{a^2(a^2u^2+b^2) - 0^2} = a\sqrt{a^2u^2+b^2}$$

$$P = \iint\limits_{D} a\sqrt{a^2u^2+b^2}\, du\, dv = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\, du \int_0^1 dv = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\, du$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \frac{b}{a}s & \\ u^2 = \frac{b^2}{a^2}s^2 & u\Big|_0^{\frac{b}{a}} \Rightarrow s\Big|_0^1 \\ du = \frac{b}{a}ds & \end{array} \right| = a\int_0^1 \sqrt{b^2s^2+b^2}\, \frac{b}{a}\, ds = b^2\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds$$

$$\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{s^2+1} & dv = ds \\ du = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}ds & v = s \end{array} \right| = s\sqrt{s^2+1} - \int \frac{s^2+1-1}{\sqrt{s^2+1}}\, ds$$

$$= -\int\sqrt{s^2+1}\, ds + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}}$$

tražena površina

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds = s\sqrt{s^2+1} + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}} = s\sqrt{s^2+1} + \ln|s+\sqrt{s^2+1}| + C \Rightarrow P = \frac{b^2}{2}\left[\sqrt{2} + \ln|1+\sqrt{2}|\right]$$

U zadacima od 278. do 287. naći prvu kvadratnu formu za sljedeće (rotacione) plohe:

278. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = c\cos u;\ u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi]$, rotacioni (kružni) elipsoid;

279. $x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, kružni valjak;

280. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = ku;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, kružni stožac;

281. $z^2 = x^2 + y^2$, kružni stožac;

282. $x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, rotacioni paraboloid (vidi zad. 334 i 372);

283. $x = a\,\mathrm{ch}\, u\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\, u\sin v,\ z = c\,\mathrm{sh}\, u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, jednoplošni rotacioni hiperboloid;

284. $x = a\,\mathrm{sh}\, u\cos v,\ y = a\,\mathrm{sh}\, u\sin v,\ z = c\,\mathrm{ch}\, u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, dvoplošni rotacioni hiperboloid;

285. $x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u;\ u, v \in [0, 2\pi]$, torus;

286. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right);\ u \in \mathbf{R}_+,\ v \in [0, 2\pi]$, pseudosfera;

287. $x = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, katenoid (vidi zad. 221).

288. Naći prvu diferencijalnu formu helikoida:

$$x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv;\quad u, v \in \mathbf{R}.$$

289. Naći prvu diferencijalnu formu koordinatne XOY ravnine parametrizirane sa:

$$x = u,\ y = v,\ z = 0,\quad u, v \in \mathbf{R}.$$

290. Naći prvu diferencijalnu formu elipsoida (vidi zad. 227):

$$x = a\sin u\cos v,\ y = b\sin u\sin v,\ z = c\cos u,\ u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi].$$

291. Odrediti plohu čija je prva diferencijalna forma:

$$ds^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}\left[(2x^2 + y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (x^2 + 2y^2)\,dy^2\right]$$

i na kojoj se nalazi kružnica $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$.

292. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv$ za plohu i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = \cos u \, \vec{i} + \sin u (\cos v \, \vec{j} + \sin v \, \vec{k}); \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

293. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati element ploštine dS plohe i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = (u + v^2) \vec{a} + (v + u^2) \vec{b} + uv \vec{c}; \; u, v \in \mathbf{R}.$$

($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ konstantni vektori).

294. Ako je porodica krivulja na plohi zadana diferencijalnom jednadžbom:

$$A \, du + B \, dv = 0,$$

tada je jednadžba ortogonalnih trajektorija, tj. krivulja koje sijeku zadane krivulje pod pravim kutem dana s:

$$(BE - AF) \, du + (BF - AG) \, dv = 0.$$

Dokazati.

295. Sastaviti diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija porodice krivulja

$$\phi(u, v) = \text{const.}$$

na plohi $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

296. Naći ortogonalne trajektorije porodice krivulja

$$u + v = \text{const.}$$

koje leže na kugli:

$$\vec{r} = \{R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u\}; \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

297. Na kružnom stošcu:

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = u; \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$$

promatrati porodicu krivulja:

$$v = u^2 + \alpha,$$

gdje je α parametar. Naći porodicu njihovih ortogonalnih trajektorija.

298. Dokazati da uvjet ortogonalnosti dviju porodica krivulja na plohi koje su određene diferencijalnom jednadžbom:

$$A(u, v) \, du^2 + 2B(u, v) \, du \, dv + C(u, v) \, dv^2 = 0$$

glasi:
$EC = 2BF + AG = 0.$

299. Dokazati da na helikoidu:

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

diferencijalna jednadžba:

$$du^2 - (u^2 + a^2) \, dv^2 = 0$$

određuje ortogonalnu mrežu parametarskih linija.

300. Pokazati da se krivulje:

$$\sin u + a(v + 1) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{a}{\sin^3 u} + v = b$$

(a, b = const.) na plohi:

$$\vec{r} = \left\{ \sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\}, \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi],$$

sijeku ortogonalno.

301. Na plohi:

$$\vec{r} = \{u, v, uv\}, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

dane su dvije krivulje: $c_1 : u^2 + v^2 = 1$ i $c_2 : v = au$.

a) Naći presječne točke danih krivulja.
b) Odrediti kut pod kojim se sijeku te krivulje.
c) Koliko je a da se krivulje sijeku ortogonalno?

302. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, u + v\}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

303. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{v \cos u - a \sin u, v \sin u + a \cos u, au\} \; (a > 0), \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

304. Dana je ploha:

$$x = u^2 + v^2, \; y = u^2 - v^2, \; z = uv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

a) Naći prvu kvadratnu formu.
b) Izračunati diferencijal duljine luka za krivulje $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.
c) Izračunati duljinu luka krivulje $v = au$ između točaka njenog presjeka s krivuljama $u = 1$, $u = 2$.

305. Naći pod kojim se kutem sijeku krivulje:

$$u + v = 0, \; u - v = 0$$

na helikoidu:

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

306. Naći kut pod kojim krivulja:

$$v = A e^{mu}$$

siječe izvodnice kružnog stošca:

$$x = v \cos u \cos \alpha, \; y = v \sin u \cos \alpha, \; z = v \sin \alpha, \; u \in [0, 2\pi], \; v \in \mathbf{R},$$

gdje je α parametar.

307. Na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u \, dv^2$$

naći duljinu luka krivulje $v = u$ među točkama $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

308. Naći kut među krivuljama

$$v = 2u, \quad v = -2u$$

na plohi koja ima prvu kvadratnu formu:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

309. Naći kut između krivulja zadanih jednadžbama:

$$v = u + 1 \quad \text{i} \quad v = 3 - u$$

na plohi:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

310. Na helikoidu:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

zadane su krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \ln\left(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c.$$

Izračunati duljinu luka tih krivulja između točaka

$$M_1(u_1, v_1) \quad \text{i} \quad M_2(u_2, v_2).$$

311. Na pseudosferi:

$$x = a\sin u\cos v, \quad y = a\sin u\sin v,$$

$$z = a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right), \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi]$$

zadane su dvije porodice krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \pm\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + c.$$

Izračunati duljinu luka svake porodice krivulje između točaka $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

312. Naći ploštine četverokuta na helikoidu:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

omeđenog krivuljama: $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1.$

313. Naći ploštinu krivocrtnog trokuta:

$$u = \pm av, \quad v = 1,$$

smještenog na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

314. Naći ploštinu konveksnog kuglinog područja omeđenog petljom krivulje Vivijanija (vidi zad. 55).

315. Naći površinu torusa:

$x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi]$, (vidi zad. 285).

278. $ds^2 = (a^2\cos^2 u + c^2\sin^2 u)\,du^2 + a^2\sin^2 u\,dv^2.$

279. $ds^2 = du^2 + R^2\,dv^2.$ **280.** $ds^2 = (1 + k^2)\,du^2 + u^2\,dv^2.$

281. $ds^2 = \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\,dx^2 + \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}\,dx\,dy + \dfrac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}\,dy^2.$

282. $ds^2 = (a^2 + 4u^2)\,du^2 + a^2u^2\,dv^2.$

283. $ds^2 = (a^2\operatorname{sh}^2 u + c^2\operatorname{ch}^2 u)\,du^2 + a^2\operatorname{ch}^2 u\,dv^2.$

284. $ds^2 = (a^2\operatorname{ch}^2 u + c^2\operatorname{sh}^2 u)\,du^2 + a^2\operatorname{sh}^2 u\,dv^2.$

285. $ds^2 = b^2\,du^2 + (a + b\cos u)^2\,dv^2.$

286. $ds^2 = a^2\operatorname{ctg}^2 u\,du^2 + a^2\sin^2 u\,dv^2.$

287. a) $ds^2 = \operatorname{ch}^2\dfrac{u}{a}\,du^2 + a^2\operatorname{ch}^2\dfrac{u}{a}\,dv^2.$

b) $ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2$ prema zad. 221. a) i b).

288. $ds^2 = a^2\,du^2 + (a^2u^2 + b^2)\,dv^2.$ **289.** $ds^2 = du^2 + dv^2.$

290. $[(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\cos^2 u + c^2\sin^2 u]\,du^2 + \dfrac{b^2 - a^2}{2}\sin 2u\cos 2v\,du\,dv +$

$+ [\sin^2 u(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)]\,dv^2$, ili:

$$ds^2 = \{a^2[\cos^2 v + (1 - \varepsilon^2)\sin^2 v]\cos^2 u + c^2\sin^2 u]\}\,du^2 -$$

$$-\frac{a^2}{2}\varepsilon^2\sin 2u\cos 2v\,du\,dv + a^2\{\sin^2 u[\sin^2 v + (1 - \varepsilon^2)\cos^2 v]\}\,dv^2,$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{a^2}(a^2 - b^2).$$

291. Usporedivši sa zad. 270. naći ćemo p i q, a zatim zbog $\mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$ i $z = c^2 \pm \sqrt{x^2+y^2}$. Odatle uz uvjete zadatka: $z^2 = x^2 + y^2$ i $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ (rotacioni stožac).

292. Ploha je sfera, jer je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; u-krivulje $(v = v_0)$ su meridijani, a v-krivulje $(u = u_0)$ su paralele. $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \sin^2 u\,\mathrm{d}v^2$; $\mathrm{d}S = |\sin u|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

293. u-krivulje $(v = v_0)$ i v-krivulje $(u = u_0)$ su parabole, pa je ploha paraboloid; $E = (\vec{a} + 2u\vec{b} + v\vec{c})^2$, $G = (2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})^2$, $F = (\vec{a} + 2u\vec{b} + v\vec{c})\;(2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})$;

$$\mathrm{d}S = (1 - 4uv)\;(\vec{a} \times \vec{b}) + (2u^2 - v)\;(\vec{b} \times \vec{c}) + (2v^2 - u)\;(\vec{c} \times \vec{a}).$$

294. U izraz za okomitost dviju krivulja (vidi § 8.3. d)):

$E\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\bar{u} + F(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\bar{v} + \mathrm{d}\bar{u}\,\mathrm{d}v) + G\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$ uvrstiti podatak da je za prvu krivulju $C_1 : \mathrm{d}u \neq 0$, $\mathrm{d}v \neq 0$, a za drugu $C_2 : \mathrm{d}\bar{v} = -A/B\,\mathrm{d}\bar{u}$.

295. Analogno kao prethodni zadatak: C_1 ima $\mathrm{d}u \neq 0$, $\mathrm{d}v \neq 0$, $C_2 : \phi_u\,\mathrm{d}\bar{u} + \phi_v\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$. Odavde uvrstimo $\mathrm{d}\bar{v} = -\phi_u/\phi_v\,\mathrm{d}\bar{u}$ u izraz za okomitost dviju krivulja; $(E\phi_v - F\phi_u)\,\mathrm{d}u + (F\phi_v - G\phi_u)\,\mathrm{d}v = 0$.

296. $v + \operatorname{ctg} u = C$.

297. $v = \dfrac{1}{2u^2} + \beta$, gdje je β parametar.

298. Dvije porodice krivulja na plohi zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu:

$A\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2 + 2B\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right) + S = 0$, čija rješenja ćemo označiti s: C_1: $\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)_1 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$, a C_2; $\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)_2 = \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}}$. Tako imamo da vrijedi: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}} = \dfrac{C}{A}$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}} = -\dfrac{2B}{A}$, što uvršteno u uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi:

$E\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}v} + F\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}}\right) + G = 0$, daje traženi uvjet:

$EC - 2FB + GA = 0$.

299. Prema prethodnom zadatku.

300. U uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi uvrstiti da je prema uvjetima zadatka:

$$C_1\text{: } \mathrm{d}v = -\frac{\cos u}{a}\,\mathrm{d}u, \text{ a } C_2\text{: } \mathrm{d}\bar{v} = \frac{a\cos u}{\sin^4 u}\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

301. a) $u = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$; $v = \pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ (uzeti samo + ili samo −);

b) $\cos\phi = \dfrac{2a(a^2-1)}{\sqrt{2}\,\sqrt{a^4+1}\,\sqrt{a^4+6a^2+1}}$; c) $a \in \{0, 1, -1\}$.

302. Prema § 8.3.a) i b) uvjet da je neka krivulja na plohi ortogonalna na koordinatnu u-krivulju $(\bar{u} \neq 0,\ \bar{v} = c,\ \mathrm{d}\bar{u} \neq 0,\ \mathrm{d}\bar{v} = 0)$ jest: $Edu + Fdv = 0$, a uvjet ortogonalnosti na koordinatnu v-krivulju $(v \neq 0,\ u = c,\ \mathrm{d}v \neq 0,\ \mathrm{d}u = 0)$ jest: $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$. $Edu + Fdv = 0$ daje $2\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 0$, a uvjet $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$ daje:

$\mathrm{d}\bar{u} + (u^2+1)\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$; $2u + v = c_1$ i $u = \operatorname{tg}(c_2 - v)$.

303. Kao prethodni zadatak: $E\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v = 0$ daje: $(v^2 + 2a^2)\,\mathrm{d}u - a\,\mathrm{d}v = 0$, a $F\,\mathrm{d}\bar{u} + G\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$ daje: $-a\,\mathrm{d}\bar{u} + \mathrm{d}\bar{v} = 0$; $v = a\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\sqrt{2}(u - c_1)$, $v = au + c_2$.

304. a) $\mathrm{d}s^2 = (8u^2 + v^2)\,\mathrm{d}u^2 + 2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (8v^2 + u^2)\,\mathrm{d}v^2)$;

b) $\mathrm{d}s = 2\sqrt{2v^2+1}\,\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}s = (8u^2+1)\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}s = 2u\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}\,\mathrm{d}u$;

c) $s = 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}$.

305. $\cos\phi = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$.

306. $E = v^2\cos^2\alpha$, $G = 1$, $F = 0$, C_1: $\mathrm{d}\bar{u} = 0$, $\mathrm{d}\bar{v} \neq 0$,

$$C_2\text{: } \mathrm{d}v = mv\,\mathrm{d}u, \quad \cos\theta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + \cos^2\alpha}} = \text{const.}$$

307. $s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$.

308. $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$.

309. $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

310. $s = \sqrt{2}\,|u_2 - u_1|$.

311. $$s = a\left|\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}\right| = a\left|\ln\operatorname{tg}\frac{u_2}{2} - \ln\operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\right| = a\,|v_2 - v_1|.$$

312. $S = \dfrac{a^2}{2}\,[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

313. $S = a^2\left[\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$.

314. $S = 2a^2$.

315. $$S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} b(a + b\cos u)\,\mathrm{d}v = 4\pi^2 ab.$$

Dio teorije

§ 8. Prva diferencijalna forma plohe

8.1. Gaussove veličine prvoga reda

Neka je zadana ploha S svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}, \qquad (u, v) \in D. \tag{1}$$

Tada se za plohu S definiraju funkcije: $E, F, G : D \to \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{2}$$

$$G = \vec{r}_v^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Veličine E, F i G definirane sa (2) zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama prvoga reda* ili koeficijentima prve diferencijalne forme.

8.2. Duljina luka krivulje na plohi. Prva diferencijalna forma plohe

Ako je zadana krivulja α na plohi S sa:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \; t \in I$$

i ako su $\vec{r}(t_1)$ i $\vec{r}(t_2)$ radijvektori dviju njezinih točaka A i B onda je realan broj:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \tag{3}$$

duljina luka krivulje na plohi od točke A do točke B.

Promotrimo funkciju $s(t) : I \to \mathbf{R}$ za krivulju α na plohi S definiranu sa:

$$s(t) = \int_{a}^{t} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_{a}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

Tada jednadžbu (4) možemo pisati u diferencijalnom obliku ovako:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \equiv I \tag{5}$$

koji se zove *prva diferencijalna ili fundamentalna forma plohe*. Još se zove i metrička ili kvadratna forma plohe i označuje sa I.

Formom I određeno je mjerenje duljina krivulja na plohi. Kažemo da je formom I dana *metrika* na plohi.

8.3. Kut između dviju krivulja na plohi definira se kao kut između njihovih tangenata u presječnoj točki M

Neka su zadane krivulja α i β sa:

$$\alpha \ldots \vec{r}_1(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad \text{tj. } u = u(t),\ v = v(t)$$

$$\beta \ldots \vec{r}_2(t) = \vec{r}(\bar{u}(t), \bar{v}(t)), \quad \text{tj. } u = \bar{u}(t),\ v = \bar{v}(t)$$

tada su njihovi tangentni vektori dani s:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{r}_u\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\frac{dv}{dt},$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{r}_u\frac{d\bar{u}}{dt} + \vec{r}_v\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Kut ω između dviju krivulja na plohi u presječnoj točki M jednak je tada:

$$\cos\omega = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_1|\,|d\vec{r}_2|} = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{\sqrt{d\vec{r}_1^{\,2}}\sqrt{d\vec{r}_2^{\,2}}}, \text{ tj.}$$

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,d\bar{u}^2 + 2F\,d\bar{u}\,d\bar{v} + G\,d\bar{v}^2}}, \tag{6}$$

gdje su:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\,du + \vec{r}_v\,dv,$$

$$d\vec{r}_1 = \vec{r}_u\,d\bar{u} + \vec{r}_v\,d\bar{v},$$

Napomena: Gaussove veličine E, F, G u (6) računamo u točki M.

Specijalni slučajevi:

a) Kut između krivulje na plohi i u-krivulje dan je izrazom (tada je β u-krivulja, tj. $\bar{v} = \text{const.}$, $d\bar{v} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\,\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

b) Kut između krivulje na plohi i v-krivulje dan je izrazom (tada je β v-krivulja, tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + G\,dv}{\sqrt{G}\,\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

c) Kut između koordinatnih u i v-krivulja dan je izrazom (tada je krivulja α u-krivulja, tj. $v = \text{const.}$, $dv = 0$, a krivulja β v-krivulja tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

d) Ako su krivulje α i β na plohi međusobno okomite, tada je:

$$E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v} = 0.$$

e) Uvjet okomitosti koordinatnih u i v krivulja prema c) glasi:

$$F = 0.$$

8.4. Ploština omeđenog dijela plohe

Neka je dana ploha S svojom jednadžbom $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ i na njoj zatvoreno područje (K). Tada je ploština područja (K) jednaka:

$$S=\iint_{(K)} dS=\iint_{D} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv=\iint_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv, \tag{7}$$

gdje je D zatvoreno područje u ravnini takvo da je $\vec{r}(D)=(K)$.
Ovdje, naime, vrijedi (vidi zad. 2):

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2=\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2=EG-F^2. \tag{8}$$

Izraz:

$$EG-F^2=W^2 \tag{9}$$

koji je uvijek pozitivan zove se *diskriminanta prve diferencijalne forme* ili Weingartenova funkcija.

Uvjet (6) iz § 6, tj. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ sada postaje $EG-F^2 \neq 0$.

Jedinični vektor normale iz § 7.1. sada glasi:

$$\vec{N}^0=\frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{10}$$

Zadaci

266. Zadana je sfera svojom parametrizacijom (vidi zad. 204):

$$\vec{r}=\{r\sin u\cos v,\ r\sin u\sin v,\ r\cos u\},\quad u\in[0,\pi],\quad v\in[-\pi,\pi].$$

1° Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.
2° Naći tangencijalnu ravninu u točkama za koje je $u=0$ i $u=\pi$.

1° Prva diferencijalna forma glasi:

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2.$$

Kako je:

$$\vec{r}_u=\{r\cos u\cos v,\ r\cos u\sin v,\ -r\sin u\}$$
$$\vec{r}_v=\{-r\sin u\sin v,\ r\sin u\cos v,\ 0\},$$

to je:

$$E=\vec{r}_u^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=$$
$$=(r\cos u\cos v)^2+(r\cos u\sin v)^2+(-r\sin u)^2=r^2,$$
$$G=\vec{r}_v^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=$$
$$=(-r\sin u\sin v)^2+(r\sin u\sin v)^2+(0)^2=r^2\sin^2 u,$$

Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcije "Prva diferencijalna forma plohe")

266. Zadana je sfera svojom parametrizacijom (vidi zad. 204):

$$\vec{r}=\{r\sin u\cos v,\ r\sin u\sin v,\ r\cos u\},\quad u\in[0,\pi],\quad v\in[-\pi,\pi].$$

1° Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.
2° Naći tangencijalnu ravninu u točkama za koje je $u=0$ i $u=\pi$.

1° Prva diferencijalna forma glasi:

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2.$$

Kako je:

$$\vec{r}_u=\{r\cos u\cos v,\ r\cos u\sin v,\ -r\sin u\}$$
$$\vec{r}_v=\{-r\sin u\sin v,\ r\sin u\cos v,\ 0\},$$

to je:

$$E=\vec{r}_u^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=$$
$$=(r\cos u\cos v)^2+(r\cos u\sin v)^2+(-r\sin u)^2=r^2,$$
$$G=\vec{r}_v^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=$$
$$=(-r\sin u\sin v)^2+(r\sin u\sin v)^2+(0)^2=r^2\sin^2 u,$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= -r \sin u \cos u \sin v \cos v + r \sin u \cos u \sin v \cos v - 0 \cdot r \sin u = 0.$$

Tada prva diferencijalna forma glasi:

$$I = r^2 du^2 + r^2 \sin^2 u \, d v^2.$$

Ovo možemo pisati i ovako:

$$\vec{r} = \{ r \cos \phi \sin \theta, \ r \sin \phi \sin \theta, \ r \cos\theta \},$$

prva diferencijalna forma:

$$I = r^2 \sin^2 \theta \, d \phi^2 + r^2 d\theta^2.$$

2° Točka A_1 za $u = 0$, $v =$ proizvoljno, je sjeverni pol sfere, dok je točka A_2 za $u = \pi$, $v =$ proizvoljno, južni pol sfere. Obje ove točke su singularne točke geografske koordinatne (parametarske) mreže (u, v) sfere, jer: 1. svi meridijani (u-linije) $v = \text{const.}$ se sastaju u sjevernom i južnom polu, a 2. pripadne paralele $u_{A1} = 0$ i $u_{A2} = \pi$ su degenerirale u jednu jedinu točku (A_1 odnosno A_2). Uvjet regularnosti iz § 7.1. nije ispunjen. U tim točkama ipak postoje tangencijalne ravnine. Sfera ima implicitnu jednadžbu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Odavde proizlazi da je:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, \vec{k}$$

parametrizacija za gornju, a

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, \vec{k}$$

parametrizacija za donju polusferu,
pa tangencijalne ravnine u točkama $A_1 = (0, 0, \text{r})$ i $A_2 = (0, 0, -\text{r})$ imaju jednadžbu (tablica 4):

$$Z \pm r = 0\,(X - 0) - 0\,(Y - 0),$$

odnosno:

$$Z = \pm r.$$

Točke A_1 i A_2 u ovoj parametrizaciji nisu više singularne, čak je u njima $EG - F^2 = 1$.

267. Naći prvu diferencijalnu formu ravnine u odnosu na parametrizaciju:

$$x = x_0 + l_1 u + l_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u + m_2 v$$
$$z = z_0 + n_1 u + n_2 v, \quad \text{(vidi zad. 216).}$$

Kako je:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2,$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2,$$

to je:

$$ds^2 = (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\, du^2 + 2\,(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)\, dudv + (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)\, dv^2.$$

Ako su parametarske u i v crte zadane jediničnim vektorima, tada je:

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, dudv + dv^2,$$

gdje je ω kut između pravaca u i v.
Ako su još pravci u i v međusobno okomiti, tada je prva diferencijalna forma:

$$I = du^2 + dv^2 \quad \text{ili} \quad I = dx^2 + dy^2.$$

Ako je XOY ravnina parametrizirana polarnim koordinatama:

$$x = \varrho \cos \phi$$
$$x = \varrho \sin \phi$$
$$z = 0,$$

tada je njena prva diferencijalna forma:

$$I = d\varrho^2 + \varrho^2 d\phi^2.$$

268. Naći prvu diferencijalnu formu rotacione plohe (vidi zad. 215):

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u),$$

gdje je os rotacije os OZ.
Imamo:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (f' \cos v)^2 + (f' \sin v)^2 + (g')^2 = f'^2 + g'^2$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = (-f \sin v)^2 + (f \cos v)^2 + (0)^2 = f^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -ff' \sin v \cos v + ff' \sin v \cos v + 0\, g' = 0,$$

pa je prva diferencijalna forma:

$$ds^2 = (f'^2 + g'^2)\, du^2 + f^2 dv^2.$$

Napomenimo da koordinatne krivulje u i v ove rotacione plohe čine ortogonalnu mrežu jer je $F = 0$.

269. Pokazati da postoji takva parametrizacija rotacione plohe da prva kvadratna forma ima oblik:

$$ds^2 = du^2 + G(u)\, dv^2.$$

Prema zad. 268. prva diferencijalna forma rotacione plohe ima oblik:

$$ds^2 = (f'^2(u) + g'^2(u))\,du^2 + f^2(u)\,dv^2.$$

Vidi se da se ona dade svesti na prvi oblik. Dovoljno je uvesti transformaciju parametara zadanu s:

$$\bar{u} = \int \sqrt{f'^2 + g'^2}\,du, \qquad \bar{v} = v.$$

270. Naći prvu diferencijalnu formu plohe zadane eksplicitnom jednadžbom $z = z(x, y)$, (vidi zad. 214).
Vektorska jednadžba zadane plohe glasi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\,\vec{k}.$$

Kako je:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right)^2 = (1)^2 + (0)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1 + p^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right)^2 = (0)^2 + (1)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + q^2,$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + pq = pq,$$

to je prva diferencijalna forma:

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

odnosno:

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx dy + (1 + q^2)\,dy^2.$$

(Ovdje je $p = z_x$, $q = z_y$; vidi § 7, tj. 7.2. i 7.3.)

271. Zadana je ploha:

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v\vec{c}, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zadani vektori.

a) Ispitati što su koordinatne krivulje.
b) Odrediti koeficijente E, F, G prve kvadratne forme.
c) Kada će se koordinatne krivulje ove plohe sjeći ortogonalno?
d) Naći element ploštine dS dane plohe.

a) Koordinatne v-krivulje jesu (za $u = u_0 = \text{const.}$):

$$\vec{r} = u_0\vec{a} + \vec{b}\sin u_0 + v\vec{c}$$

što je jednadžba pravca točkom $M_0(\vec{r}_0 = u_0\vec{a} + \vec{b}\sin u_0)$ a paralelne s vektorom $\vec{c}$.

Koordinatne u-krivulje jesu (za $v = v_0 = \text{const.}$):

$$\vec{r} = u\,\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v_0\vec{c}.$$

To su kose sinusoide u ravnini paralelnoj s ravninom određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Skicirajte ih.

b) $E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (\vec{a} + \vec{b}\cos u)^2$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = (\vec{c})^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}\cos u.$$

c) Koordinatne u i v krivulje sjeći će se ortogonalno za $\vec{c} = k(\vec{a} \times \vec{b})$, jer je tada:

$$F = k(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + k(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}\cos u = 0.$$

d) $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,du dv = |(\vec{a} + \vec{b}\cos u) \times \vec{c}|\,du dv =$
$= |(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})\cos u|\,du dv.$

Ako su koordinatne krivulje međusobno ortogonalne, tada je $F = 0$, pa je element ploštine:

$$dS = \sqrt{EG}\,du dv = k\sqrt{(\vec{a} \times \vec{b})^2\,(\vec{a} + \vec{b}\cos u)^2}\,du dv.$$

272. Na plohi (sfera):

$$\vec{r} = \{a\cos v \sin u,\ a\sin v \sin u,\ a\cos u\}, \qquad u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi],$$

zadane su dvije krivulje c_1 i c_2 sa $c_1: u = v$ i $c_2: \bar{u} + \bar{v} = \frac{\pi}{2}$.

a) Naći sjecišta zadanih krivulja.
b) Odrediti kut pod kojim se sijeku zadane krivulje.

Prvi način – direktan

a) Te krivulje imaju jednadžbe:

$$c_1: \vec{r}_1 = \{a\sin u\cos u,\ a\sin^2 u,\ a\cos u\}$$

$$c_2: \vec{r}_2 = \{a\sin^2 u,\ a\sin u\cos u,\ a\cos u\},$$

a njihova sjecišta:

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{za } u = \frac{\pi}{4},$$

$$(0, 0, a) \text{ za } u = 0, \qquad (0, 0, -a) \text{ za } u = \pi.$$

b) Kut pod kojim se sijeku dvije krivulje jest kut između njihovih tangenata u sjecištima tih krivulja.
Tangente na zadane krivulje imaju smjer:

$$\frac{d\vec{r}_1}{du} = \{a\cos 2u, a\sin 2u,\ -a\sin u\}$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{du} = \{a\sin 2u, a\cos 2u,\ -a\sin u\},$$

pa je kut između tih dviju krivulja jednak:

$$\cos\omega = \frac{\frac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_2}{du}}{\left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right|} \frac{\sin 4u+\sin^2 u}{1+\sin^2 u}.$$

Za $u=\frac{\pi}{4}$ traženi kut je:

$$\cos\omega=\frac{1}{3}, \quad \omega=\arccos\frac{1}{3}.$$

U točkama $A=(0, 0, a)$ i $B=(0, 0, -a)$ krivulje se sijeku pod pravim kutom.
Napomenimo, da u sve tri točke egzistiraju tangente na obje krivulje, jer su sve tri točke regularne točke krivulje (vidi § 4.2).

Drugi način pomoću formule:

b) $$\cos\omega=\frac{Edu d\bar{u}+F(dud\bar{v}+dvd\bar{u})+Gdvd\bar{v}}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{Ed\bar{u}^2+2Fd\bar{u}d\bar{v}+Gd\bar{v}^2}}.$$

Kako je (vidi zad. 266.1°):

$$E=a^2,\ G=a^2\sin^2 u, \quad F=0, \quad EG-F^2=a^4\sin^2 u.$$

to je:

$$\cos\omega=\frac{Edud\bar{u}+Gdvd\bar{v}}{\sqrt{Edu^2+Gdv^2}\sqrt{Ed\bar{u}^2+Gd\bar{v}^2}}=$$

$$=\frac{a^2dud\bar{u}+a^2\sin^2 udvd\bar{v}}{\sqrt{a^2du^2+a^2\sin^2 udv^2}\sqrt{a^2d\bar{u}^2+a^2\sin^2 ud\bar{v}^2}}$$

$$\cos\omega=\frac{dud\bar{u}+\sin^2 udvd\bar{v}}{\sqrt{du^2+\sin^2 udv^2}\sqrt{d\bar{u}^2+\sin^2 ud\bar{v}^2}}.$$

Za krivulju c_1 $\quad v=u$ imamo $dv=du$, a za krivulju c_2 $\quad \bar{v}=\frac{\pi}{2}-u$ imamo $d\bar{v}=-d\bar{u}$, pa je:

$$\cos\omega=\frac{dud\bar{u}+\sin^2 udud\bar{u}}{\sqrt{du^2+\sin^2 udu^2}\sqrt{d\bar{u}^2+\sin^2 ud\bar{u}^2}}=\frac{1-\sin^2 u}{1+\sin^2 u},$$

$$\cos\omega=\frac{\cos^2 u}{1+\sin^2 u}.$$

U točki $u=\frac{\pi}{4}$ traženi kut je $\omega=\arccos\frac{1}{3}$.

Za prvu točku rezultat je, dakle, isti kao na prvi način i to zbog toga što je ta točka regularna točka parametrizacije $(EG-F^2=\frac{a^4}{2}\neq 0)$. Međutim, točke $u=0$ i $u=\pi$, tj. $A=(0, 0, a)$ i $(0, 0, -a)$ jesu polovi kugle,

one su *singularne točke parametarske mreže* (vidi zad. 266. 2° i § 7.1.b). U takvim točkama ne možemo na taj način računati kut između krivulja.

U singularnim točkama parametarske mreže kugle (ili bilo koje druge plohe) kut između dviju krivulja na plohi potražit ćemo direktno kao na prvi način (tj. neovisno o plohi), ako su to regularne točke krivulje. Može se također odabrati i druga parametrizacija za koju te točke nisu singularne kao npr. u zadacima 266. i 323.

273. Naći kut pod kojim se sijeku krivulje

$$x=x_0, \quad y=y_0 \text{ na plohi } z=axy.$$

Ploha ima vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r}=\{x,\ y,\ a\ x\ y\}, \quad x,\ y\in\mathbf{R}.$$

Krivulje $x=x_0$ i $y=y_0$ su koordinatne krivulje te parametrizacije i imaju jednadžbe:

$$\vec{r}_1=\{x_0,\ y,\quad a\ x_0\ y\},$$
$$\vec{r}_2=\{x,\ y_0,\quad a\ x\ y_0\}.$$

Tangentni vektori tih krivulja jesu:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dy}=\{0,\ 1,\ ax_0\},$$
$$\frac{d\vec{r}_2}{dx}=\{1,\ 0,\ ay_0\},$$

pa je kut između njih dan sa:

$$\cos\omega=\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\sqrt{1+a^2y_0^2}}.$$

Taj smo kut mogli odrediti i na drugi način: on se, naime, podudara s kutom između koordinatnih krivulja, a taj je dan formulom:

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Kako je:

$$E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right)^2=1+a^2y_0^2,$$
$$G=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right)^2=1+a^2x_0^2,$$
$$F=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=a^2x_0y_0,$$

to je:

$$\cos\omega = \frac{a^2 x_0 y_0}{\sqrt{(1+a^2y_0^2)\,(1+a^2x_0^2)}}.$$

274. Naći izraz za ploštinu zatvorenog područja (K) na plohi $z = z(x, y)$. Jednadžba plohe ima vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}.$$

Kako je:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\vec{k} = \vec{i} + p\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{k} = \vec{j} + q\vec{k},$$

to je:

$$E = \vec{r}_x^{\,2} = 1 + p^2, \quad G = \vec{r}_y^{\,2} = 1 + q^2,$$

$$F = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_y = pq.$$

$$EG - F^2 = (1+p^2)\,(1+q^2) - (pq)^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Tada je ploština:

$$S = \iint_{(K)} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

gdje je D_{xy} ono zatvoreno područje u ravnini XOY za koje je $\vec{r}(D_{xy}) = (K)$.

275. Naći ploštinu četverokuta na helikoidu (vidi zad. 220):

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = bv, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

omeđenog krivuljama $u = 0$, $u = \dfrac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

Imamo:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + (0)^2 = a^2$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = (-au\sin v)^2 + (au\cos v)^2 + (b)^2 = a^2u^2 + b^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0.$$

$$S = \iint_{(K)} \sqrt{a^2(a^2u^2+b^2)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\,\mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\,\mathrm{d}u.$$

Označimo neodređeni integral s I i računajmo:

$$I = \int \sqrt{a^2u^2+b^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{a^2u^2+b^2}{\sqrt{a^2u^2+b^2}}\,\mathrm{d}u = b^2\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2u^2+b^2}} + $$

$$+ a^2 \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2u^2+b^2}}.$$

Kako je prvi integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2u^2+b^2}} = \left| \begin{aligned} a^2u^2 &= b^2t^2 \\ au &= bt \\ a\,\mathrm{d}u &= b\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2t^2+b^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{au}{b} + \sqrt{\frac{a^2u^2}{b^2} + 1}\right) = \frac{1}{a}\ln\frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b},$$

a drugi integral:

$$\int u\frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2u^2+b^2}} = \frac{u}{a^2}\sqrt{a^2u^2+b^2} - \frac{1}{a^2}\int \sqrt{a^2u^2+b^2}\,\mathrm{d}u,$$

to je:

$$I = \frac{b^2}{a}\ln\frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b} + u\sqrt{a^2u^2+b^2} - \underbrace{\int \sqrt{a^2u^2+b^2}\,\mathrm{d}u}_{I}.$$

Odavde je:

$$I = \frac{b^2}{2a}\ln\frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b} + \frac{u}{2}\sqrt{a^2u^2+b^2},$$

pa je površina:

$$S = \left[\frac{b^2}{2}\ln\frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b} + \frac{au}{2}\sqrt{a^2u^2+b^2}\right]\Bigg|_0^{\frac{b}{a}}$$

$$S = \frac{b^2}{2}\,[\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}].$$

276. Krivulja koja siječe meridijane neke rotacione plohe pod konstantnim kutom α zove se *loksodroma.* Naći jednadžbu loksodrome na rotacionoj plohi:

$$\vec{r} = \{f(u)\cos v, \quad f(u)\sin v, \quad g(u)\}.$$

Kut između neke krivulje na plohi za koju je $\mathrm{d}u \neq 0$ i $\mathrm{d}v \neq 0$ i meridijana prema § 8.3.a) jednak je radi $F = 0$ (vidi zad. 268):

$$\cos\omega \frac{\sqrt{E}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{E\,\mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2}}.$$

Za zadanu parametrizaciju prva diferencijalna forma ima oblik:

$$\mathrm{d}s^2 = (f'^2 + g'^2)\,\mathrm{d}u^2 + f^2\mathrm{d}v^2,$$

pa diferencijalna jednadžba loksodrome glasi:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{f'^2 + g'^2}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(f'^2 + g'^2)\,\mathrm{d}u^2 + f^2\mathrm{d}v^2}}, \quad \cos\alpha = \text{const.}$$

odnosno:

$$f^2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}v^2 = (f'^2 + g'^2)\,(1 - \cos^2\alpha)\,\mathrm{d}u^2,$$

odnosno:

$$f dv = \pm\sqrt{f'^2 + g'^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}u.$$

Odavde integracijom dobivamo:

$$v = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{f'^2 + g'^2}{f^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Ako je parametrizacija rotacione plohe odabrana kao u zad. 269, onda prva diferencijalna forma ima oblik:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + G(u)\,\mathrm{d}v^2,$$

pa diferencijalna jednadžba loksodrome glasi:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{d}u^2 + G(u)\,\mathrm{d}v^2}}.$$

Integracijom dobijemo:

$$v = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{G(u)}}.$$

277. Naći jednadžbu loksodrome na sferi:

$$\vec{r} = \{r\sin\theta\cos\phi, \quad r\sin\theta\sin\phi, \quad r\cos\theta\},$$

i naći njenu duljinu luka (vidi zad. 266).

Za sferu je $E = r^2$, $G = r^2\sin^2\theta$, $F = 0$, prva diferencijalna forma:

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Prema prethodnom zadatku kut između krivulja na kugli za koje je $\mathrm{d}\theta \neq 0$ i $\mathrm{d}\phi \neq 0$ i meridijana dan je sa:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{E}\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{E^2\mathrm{d}\theta^2 + G\,\mathrm{d}\phi^2}}.$$

Zato je diferencijalna jednadžba loksodrome na sferi:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2}\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)}},$$

odnosno:

$$\cos^2\alpha\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) = \mathrm{d}\theta^2.$$

Jednadžba loksodrome kao rješenje navedene diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\phi = \pm\,\mathrm{tg}\alpha\ln\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} + C.$$

Napišimo jednadžbu loksodrome pomoću geografske širine $\psi = 90° - \theta$. Tada imamo:

$$\phi = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\ln\left[\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1} + C,$$

$$\phi = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\ln\mathrm{ctg}\left(45° - \frac{\psi}{2}\right) + C,$$

odnosno:

$$\phi = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\ln\mathrm{tg}\left(45° + \frac{\psi}{2}\right) + C.$$

Loksodroma je, dakle, krivulja koja se omata spiralno oko sjevernog ($\theta = 0$, $\phi =$ proizv.) odnosno oko južnog pola ($\theta = \pi$, $\phi =$ proizv.), no u polove nikad ne stiže, a pritom siječe meridijane pod istim konstantnim kutom.

Usprkos tome loksodroma ima konačnu duljinu. Element duljine luka bilo koje krivulje na sferi dan je sa:

$$\mathrm{d}s = r\sqrt{\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\theta^2}.$$

Odavde je:

$$s = r\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Uzmemo li u obzir diferencijalnu jednadžbu loksodrome, imamo da je duljina luka loksodroma:

$$s = r\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta,$$

$$s = r\,\frac{\theta_2 - \theta_1}{\cos\alpha}.$$

Duljina loksodrome između dviju paralela ovisi samo o razlici širina $\theta_2 - \theta_1$ za zadani kut α. Ako je $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, onda je duljina luka loksodrome između polova:

$$s = \frac{r\pi}{\cos\alpha}.$$

Njezina je duljina, dakle, konačna veličina za $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ (α je kut pod kojim loksodroma siječe meridijane sfere!). Za $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ se loksodroma podudara s paralelom (kojih ima više).

U zadacima od 278. do 287. naći prvu kvadratnu formu za sljedeće (rotacione) plohe:

278. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = c\cos u;\ u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi]$, rotacioni (kružni) elipsoid;

279. $x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u;\ u\in\mathbf{R},\ v\in[0,2\pi]$, kružni valjak;

280. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = ku;\ u\in\mathbf{R},\ v\in[0,2\pi]$, kružni stožac;

281. $z^2 = x^2 + y^2$, kružni stožac;

282. $x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = u;\ u\in\mathbf{R},\ v\in[0,2\pi]$, rotacioni paraboloid (vidi zad. 334 i 372);

283. $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\,u\sin v,\ z = c\,\mathrm{sh}\,u;\ u\in\mathbf{R},\ v\in[0,2\pi]$, jednoplošni rotacioni hiperboloid;

284. $x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\ y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v,\ z = c\,\mathrm{ch}\,u;\ u\in\mathbf{R},\ v\in[0,2\pi]$, dvoplošni rotacioni hiperboloid;

285. $x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u;\ u, v\in[0,2\pi]$, torus;

286. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\left(\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right);\ u\in\mathbf{R}_+,$ $v\in[0,2\pi]$, pseudosfera;

287. $x = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\sin v,\ z = u;\ u\in\mathbf{R},\ v\in[0,2\pi]$, katenoid (vidi zad. 221).

288. Naći prvu diferencijalnu formu helikoida:

$$x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv;\quad u, v\in\mathbf{R}.$$

289. Naći prvu diferencijalnu formu koordinatne XOY ravnine parametrizirane sa:

$$x = u,\ y = v,\ z = 0,\quad u, v\in\mathbf{R}.$$

290. Naći prvu diferencijalnu formu elipsoida (vidi zad. 227):

$$x = a\sin u\cos v,\ y = b\sin u\sin v,\ z = c\cos u,\ u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi].$$

291. Odrediti plohu čija je prva diferencijalna forma:

$$ds^2 = \frac{1}{x^2+y^2}\left[(2x^2+y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (x^2+2y^2)\,dy^2\right]$$

i na kojoj se nalazi kružnica $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$.

292. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati $dS = |\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,du\,dv$ za plohu i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = \cos u\,\vec{i} + \sin u(\cos v\,\vec{j} + \sin v\,\vec{k});\ u\in[0,\pi],\ v\in[-\pi,\pi].$$

293. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati element ploštine dS plohe i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = (u+v^2)\,\vec{a} + (v+u^2)\,\vec{b} + uv\,\vec{c};\ u, v\in\mathbf{R}.$$

($\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ konstantni vektori).

294. Ako je porodica krivulja na plohi zadana diferencijalnom jednadžbom:

$$A\,du + B\,dv = 0,$$

tada je jednadžba ortogonalnih trajektorija, tj. krivulja koje sijeku zadane krivulje pod pravim kutem dana s:

$$(BE - AF)\,du + (BF - AG)\,dv = 0.$$

Dokazati.

295. Sastaviti diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija porodice krivulja

$$\phi(u, v) = \mathrm{const.}$$

na plohi $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$.

296. Naći ortogonalne trajektorije porodice krivulja

$$u + v = \mathrm{const.}$$

koje leže na kugli:

$$\vec{r} = \{R\sin u\cos v,\ R\sin u\sin v,\ R\cos u\};\quad u\in[0,\pi],\quad v\in[-\pi,\pi].$$

297. Na kružnom stošcu:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u;\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi],$$

promatrati porodicu krivulja:

$$v = u^2 + \alpha,$$

gdje je α parametar. Naći porodicu njihovih ortogonalnih trajektorija.

298. Dokazati da uvjet ortogonalnosti dviju porodica krivulja na plohi koje su određene diferencijalnom jednadžbom:

$$A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2 = 0$$

glasi:

$EC = 2BF + AG = 0.$

299. Dokazati da na helikoidu:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av,\quad u, v\in\mathbf{R}$$

diferencijalna jednadžba:

$$du^2 - (u^2 + a^2)\,dv^2 = 0$$

određuje ortogonalnu mrežu parametarskih linija.

300. Pokazati da se krivulje:

$$\sin u + a(v+1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{a}{\sin^3 u} + v = b$$

(a, b = const.) na plohi:

$$\vec{r} = \left\{ \sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\}, \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi],$$

sijeku ortogonalno.

301. Na plohi:

$$\vec{r} = \{u, v, uv\}, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

dane su dvije krivulje: $c_1 : u^2 + v^2 = 1$ i $c_2 : v = au$.

a) Naći presječne točke danih krivulja.
b) Odrediti kut pod kojim se sijeku te krivulje.
c) Koliko je a da se krivulje sijeku ortogonalno?

302. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ u + v\}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

303. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{v \cos u - a \sin u,\ v \sin u + a \cos u,\ au\} \ (a > 0), \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

304. Dana je ploha:

$$x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

a) Naći prvu kvadratnu formu.
b) Izračunati diferencijal duljine luka za krivulje $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.
c) Izračunati duljinu luka krivulje $v = au$ između točaka njenog presjeka s krivuljama $u = 1$, $u = 2$.

305. Naći pod kojim se kutem sijeku krivulje:

$$u + v = 0,\ u - v = 0$$

na helikoidu:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

306. Naći kut pod kojim krivulja:

$$v = A e^{mu}$$

siječe izvodnice kružnog stošca:

$$x = v \cos u \cos \alpha,\ y = v \sin u \cos \alpha,\ z = v \sin \alpha,\ u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbf{R},$$

gdje je α parametar.

307. Na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\, dv^2$$

naći duljinu luka krivulje $v = u$ među točkama $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

308. Naći kut među krivuljama

$$v = 2u, \quad v = -2u$$

na plohi koja ima prvu kvadratnu formu:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

309. Naći kut između krivulja zadanih jednadžbama:

$$v = u + 1 \quad \text{i} \quad v = 3 - u$$

na plohi:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = u^2, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

310. Na helikoidu:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

zadane su krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \ln(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}) + c.$$

Izračunati duljinu luka tih krivulja između točaka

$$M_1(u_1, v_1) \quad \text{i} \quad M_2(u_2, v_2).$$

311. Na pseudosferi:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v,$$

$$z = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u\right), \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi]$$

zadane su dvije porodice krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \pm \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + c.$$

Izračunati duljinu luka svake porodice krivulje između točaka $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

312. Naći ploštine četverokuta na helikoidu:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

omeđenog krivuljama: $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

313. Naći ploštinu krivocrtnog trokuta:

$$u = \pm av, \quad v = 1,$$

smještenog na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

314. Naći ploštinu konveksnog kuglinog područja omeđenog petljom krivulje Vivijanija (vidi zad. 55).

315. Naći površinu torusa:

$x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$, $z = b \sin u$, $u, v \in [0, 2\pi]$, (vidi zad. 285).

Rješenja

278. $ds^2 = (a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u)\, du^2 + a^2 \sin^2 u\, dv^2$.

279. $ds^2 = du^2 + R^2 dv^2$. **280.** $ds^2 = (1 + k^2)\, du^2 + u^2 dv^2$.

281. $ds^2 = \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\, dx^2 + \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy + \dfrac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}\, dy^2$.

282. $ds^2 = (a^2 + 4u^2)\, du^2 + a^2 u^2 dv^2$.

283. $ds^2 = (a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u)\, du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 u\, dv^2$.

284. $ds^2 = (a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u)\, du^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 u\, dv^2$.

285. $ds^2 = b^2 du^2 + (a + b \cos u)^2 dv^2$.

286. $ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u\, du^2 + a^2 \sin^2 u\, dv^2$.

287. a) $ds^2 = \operatorname{ch}^2 \dfrac{u}{a}\, du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{u}{a}\, dv^2$.

b) $ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\, dv^2$ prema zad. 221. a) i b).

288. $ds^2 = a^2 du^2 + (a^2 u^2 + b^2)\, dv^2$. **289.** $ds^2 = du^2 + dv^2$.

290. $[(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) \cos^2 u + c^2 \sin^2 u]\, du^2 + \dfrac{b^2 - a^2}{2} \sin 2u \cos 2v\, du\, dv +$

$+ [\sin^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)]\, dv^2$, ili:

$$ds^2 = \{a^2[\cos^2 v + (1 - \varepsilon^2) \sin^2 v] \cos^2 u + c^2 \sin^2 u]\}\, du^2 -$$

$$- \frac{a^2}{2} \varepsilon^2 \sin 2u \cos 2v\, du\, dv + a^2 \{\sin^2 u [\sin^2 v + (1 - \varepsilon^2) \cos^2 v]\}\, dv^2,$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{a^2} (a^2 - b^2).$$

291. Usporedivši sa zad. 270. naći ćemo p i q, a zatim zbog $dz = p\, dx + q\, dy$ i $z = c^2 \pm \sqrt{x^2}$ Odatle uz uvjete zadatka: $z^2 = x^2 + y^2$ i $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ (rotacioni stožac).

292. Ploha je sfera, jer je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; u-krivulje $(v = v_0)$ su meridijani, a v-krivulje $(u = u$ paralele. $ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2$; $dS = |\sin u|\, du\, dv$.

293. u-krivulje $(v = v_0)$ i v-krivulje $(u = u_0)$ su parabole, pa je ploha paraboloid; $E = (\vec{a} + 2u\vec{b} +$ $G = (2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})^2$, $F = (\vec{a} + 2u\vec{b} + v\vec{c})\ (2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})$;

$$dS = (1 - 4uv)\ (\vec{a} \times \vec{b}) + (2u^2 - v)\ (\vec{b} \times \vec{c}) + (2v^2 - u)\ (\vec{c} \times \vec{a}).$$

294. U izraz za okomitost dviju krivulja (vidi § 8.3. d)):

$E\, du\, d\bar{u} + F(du\, d\bar{v} + d\bar{u}\, dv) + G\, dv\, d\bar{v} = 0$ uvrstiti podatak da je za prvu krivulju $C_1: du$ $dv \neq 0$, a za drugu $C_2: d\bar{v} = -A/B\, d\bar{u}$.

295. Analogno kao prethodni zadatak: C_1 ima $du \neq 0$, $dv \neq 0$, $C_2: \phi_u\, d\bar{u} + \phi_v\, d\bar{v} = 0$. Odavde uvrs $d\bar{v} = -\phi_u/\phi_v\, d\bar{u}$ u izraz za okomitost dviju krivulja; $(E\phi_v - F\phi_u)\, du + (F\phi_v - G\phi_u)\, dv =$

296. $v + \operatorname{ctg} u = C$. **297.** $v = \dfrac{1}{2u^2} + \beta$, gdje je β parametar.

298. Dvije porodice krivulja na plohi zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu:

$A\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2 + 2B\left(\dfrac{du}{dv}\right) + S = 0$, čija rješenja ćemo označiti s: C_1: $\left(\dfrac{du}{dv}\right)_1 = \dfrac{du}{dv}$, a C_2; $\left(\dfrac{du}{dv}\right)_2 = \dfrac{d\bar{u}}{d\bar{v}}$. Tako imamo da vrijedi: $\dfrac{du}{dv}\dfrac{d\bar{u}}{d\bar{v}} = \dfrac{C}{A}$, $\dfrac{du}{dv} + \dfrac{d\bar{u}}{d\bar{v}} = -\dfrac{2B}{A}$, što uvršteno u uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi:

$E \dfrac{du}{dv} \dfrac{d\bar{u}}{dv} + F\left(\dfrac{du}{dv} + \dfrac{d\bar{u}}{d\bar{v}}\right) + G = 0$, daje traženi uvjet:

$EC - 2FB + GA = 0$.

299. Prema prethodnom zadatku. **300.** U uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi uvrstiti da je prema uvjetima zadatka:

$$C_1: dv = -\frac{\cos u}{a}\, du, \text{ a } C_2: d\bar{v} = \frac{a \cos u}{\sin^4 u}\, d\bar{u}.$$

301. a) $u = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$; $v = \pm \dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ (uzeti samo + ili samo −);

b) $\cos \phi = \dfrac{2a(a^2 - 1)}{\sqrt{2}\sqrt{a^4 + 1}\sqrt{a^4 + 6a^2 + 1}}$; c) $a \in \{0, 1, -1\}$.

302. Prema § 8.3.a) i b) uvjet da je neka krivulja na plohi ortogonalna na koordinatnu u-krivulju $(\bar{u} \neq 0,\ \bar{v} = c,\ d\bar{u} \neq 0,\ d\bar{v} = 0)$ jest: $Edu + Fdv = 0$, a uvjet ortogonalnosti na koordinatnu v-krivulju $(v \neq 0,\ u = c,\ dv \neq 0,\ du = 0)$ jest: $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$. $Edu + Fdv = 0$ daje $2\,du + dv = 0$, a uvjet $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$ daje:

$d\bar{u} + (u^2 + 1)\, d\bar{v} = 0$; $2u + v = c_1$ i $u = \operatorname{tg}(c_2 - v)$.

303. Kao prethodni zadatak: $E\,du + F\,dv = 0$ daje: $(v^2 + 2a^2)\, du - a\, dv = 0$, a $F\,d\bar{u} + G\,d\bar{v} = 0$ daje: $-a\, d\bar{u} + d\bar{v} = 0$; $v = a\sqrt{2} \operatorname{tg} \sqrt{2}(u - c_1)$, $v = au + c_2$.

304. a) $ds^2 = (8u^2 + v^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (8v^2 + u^2)\, dv^2)$;

b) $ds = 2\sqrt{2v^2 + 1}\, dv$, $ds = (8u^2 + 1)\, du$, $ds = 2u\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}\, du$;

c) $s = 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}$. **305.** $\cos \phi = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2}$.

306. $E = v^2 \cos^2 \alpha$, $G = 1$, $F = 0$, C_1: $d\bar{u} = 0$, $d\bar{v} \neq 0$, C_2: $dv = mv\, du$,

307. $s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$. **308.** $\cos \alpha = -\dfrac{3}{5}$. **309.** $\cos \alpha = \dfrac{2}{3}$. $\cos \theta = \dfrac{m}{\sqrt{m^2 + \cos^2 \alpha}} = \text{const.}$

310. $s = \sqrt{2}\, |u_2 - u_1|$. **311.** $s = a \left| \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sin u} \right| = a \left| \ln \operatorname{tg} \frac{u_2}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{u_1}{2} \right| = a\, |v_2 - v_1|$.

312. $S = \dfrac{a^2}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. **313.** $S = a^2 \left[\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2})\right]$. **314.** $S = 2a^2$.

315. $S = \displaystyle\int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u)\, dv = 4\pi^2 ab$.

Asimptotske linije

Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi.

Asimptotske linije površi $\vec{r}$ dobijemo kada rješenja diferencijalne jednačine $F_2=0$ uvrstimo u jednačinu površi $\vec{r}$ (F_2 je druga osnovna forma površi).

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 .$$

Odrediti asimptotske linije površi

$$z = xy^2$$

Rj.

Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi.

Pravci za koje je $F_2=0$ ($F_2 = L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$, F_2 je druga osnovna forma površi) zovu se asimptotski pravci u određenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ.

Ako zadanu površ napišemo u parametarskom obliku, u kojoj su promjenjive u i v imamo

$$\vec{r} = (u, v, uv^2) .$$

Druga osnovna forma površi se računa po formuli

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0$$

gdje je $d^2\vec{r}$ totalni diferencijal drugog reda, dok je $\vec{n} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ vektor normale na površ, $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

Izračunajmo $d^2\vec{r}$.

$$\vec{r}\,'_u = (1, 0, v^2), \qquad \vec{r}\,''_{uu} = (0,0,0)$$

$$\vec{r}\,'_v = (0, 1, 2uv), \qquad \vec{r}\,''_{vv} = (0,0,2u)$$

$$\vec{r}\,''_{uv} = (0,0,2v)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & v^2 \\ 0 & 1 & 2uv \end{vmatrix} = (-v^2, -2uv, 1), \qquad |\vec{n}| = \sqrt{v^4+4u^2v^2+1} .$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu}du^2 + 2\vec{r}''_{uv}\,du\,dv + \vec{r}''_{vv}\,dv^2$$

$$= (0,\ 0,\ 4v\,du\,dv + 2u\,dv^2)$$

$\vec{r}''_{uu}du^2 = (0, 0, 0)$

$2\vec{r}''_{uv}\,du\,dv = (0, 0, 4u\,du\,dv)$

$\vec{r}''_{vv}\,dv^2 = (0, 0, 2u\,dv^2)$

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\,d^2\vec{r}\cdot\vec{n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v^4+4u^2v^2+1}}(0,0,4v\,du\,dv+2u\,dv^2)(-v^2, -2uv, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v^4+4u^2v^2+1}}(4v\,du\,dv+2u\,dv^2)$$

Diferencijalna jednačina asimptotskih linija je $F_2 = 0$ tj.

$$\frac{1}{|\vec{n}|}(4v\,du\,dv + 2u\,dv^2) = 0$$

$$4v\,du\,dv + 2u\,dv^2 = 0$$

$$(4v\,du + 2u\,dv)\,dv = 0$$

$dv = 0$ ili $4v\,du + 2u\,dv = 0 \quad /:2$

$v = c_1$

$u\,dv = -2v\,du$ $\qquad 2v\,du + u\,dv = 0$

$\frac{du}{u} = -2\frac{dv}{v}$ $\quad \int$

$\ln|u| = -2\ln|v| + C$

$\ln u + \ln v^2 = C$ $\qquad u^2 = \frac{C}{V}$

$\ln uv^2 = C$

$uv^2 = C_2$

$\vec{r} = (u, v, uv^2)$

Asimptotske linije površi su

$\vec{r}_1 = (u,\ c_1,\ uc_1^2)$

$\vec{r}_2 = (u,\ \sqrt{\frac{c_2}{u}},\ c_2)$

$(u, \frac{C}{u^2}, \frac{C^2}{u^3})$

$(u,\ c_2,\ c_2^2 u)$

(#) Odrediti asimptotske linije površi

$$\vec{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ \frac{1}{u}).$$

Rj.

Asimptotske linije površi $\vec{r}$ dobijemo kada rješenja diferencijalne jednačine $F_2 = 0$ uvrstimo u jednačinu površi $\vec{r}$ (F_2 je druga osnovna forma površi).

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu}\,du^2 + 2\vec{r}''_{uv}\,du\,dv + \vec{r}''_{vv}\,dv^2$$

$\vec{r}'_u = (\cos v,\ \sin v,\ -\frac{1}{u^2})$ $\qquad \vec{r}''_{uu} = (0, 0, \frac{2}{u^3})$

$\vec{r}'_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$ $\qquad \vec{r}''_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$

$\vec{r}''_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$$d^2\vec{r} = (-2\sin v\,du\,dv - u\cos v\,dv^2,\ 2\cos v\,du\,dv - u\sin v\,dv^2,\ \frac{2}{u^3}du^2)$$

$$\vec{n} = \vec{r}'_u\times\vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & -\frac{1}{u^2} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (\frac{1}{u}\cos v,\ \frac{1}{u}\sin v,\ u)$$

Jednačinu asimptotskih linija možemo pisati u obliku

$$F_2 = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n} = 0$$

što za ovu površ postaje

$$-\frac{2}{u}\sin v\cos v\,du\,dv - \cos^2 v\,dv^2 + \frac{2}{u}\sin v\cos v\,du\,dv - \sin^2 v\,dv^2 + \frac{2}{u^2}du^2 = 0$$

$$-dv^2 + \frac{2}{u^2}du^2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{u^2}du^2 = dv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,\frac{du}{u} = \pm\, dv \quad //\int$$

$$\sqrt{2}\ln|u| = c \pm v$$

$$\ln u = \frac{c \pm v}{\sqrt{2}}$$

$$u_{1,2} = e^{\frac{c\pm v}{\sqrt{2}}}$$

Asimptotske linije su

$$\vec{r}_1 = \left(e^{\frac{c+v}{\sqrt{2}}}\cos v,\ e^{\frac{c+v}{\sqrt{2}}}\sin v,\ e^{\frac{-v-c}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\vec{r}_2 = \left(e^{\frac{c-v}{\sqrt{2}}}\cos v,\ e^{\frac{c-v}{\sqrt{2}}}\sin v,\ e^{\frac{-c+v}{\sqrt{2}}}\right).$$

pravcu. Tada je

$$K = \frac{1}{R} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ .$$

Podelivši i brojitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 *dobijamo* K *kao funkciju od* u,v *i* $\frac{du}{dv}$:

$$K = f(u,v,\ \frac{du}{dv}\ )\ .$$

Pravci za koje K *ima maksimalnu i minimalnu vrednost u fiksiranoj tački* (u,v) *zovu se glavni pravci u toj tački. Mogu se dobiti kao rešenja jednačine*

$$K'_x = 0 \qquad gde\ je \qquad x = \frac{du}{dv}\ .$$

Glavnim pravcima odgovaraju glavne krivine, i one mogu biti odredjene i kao koreni jednačine

$$(a)\qquad (EG-F^2)K^2 - (EN-2FM+GL)K + (LN-M^2) = 0\ .$$

Ako su K_1 *i* K_2 *glavne krivine, tada su* $R_1 = \frac{1}{K_1}$ i $R_2 = \frac{1}{K_2}$ *glavni poluprečnici.* $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ *zove se srednja krivina, a* $K_1 K_2$ *se zove Gaussova krivina površi. Iz jednačine (a) imamo*

$$K_1 K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}\ ,\quad K_1 + K_2 = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}\ .$$

Gaussova krivina površi se može izračunati i preko formule

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Ako su x_1 *i* x_2 *rešenja jednačine* $K'_x = 0$, *to je*

$$x_1 = \left(\frac{du}{dv}\right)_1 = f_1(u,v)$$

$$x_2 = \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = f_2(u,v)\ .$$

Integralne krive gornjih diferencijalnih jednačina su linije krive. Ako je u nekoj tački $K'_x \equiv 0$, *tada je svaki pravac glavni* *pravac, tj. normalna krivina je ista za svaki pravac u toj tački, i ta tačka se zove pupčasta tačka površi.*

Kako je

$$K = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G} \;, \quad x = \frac{du}{dv} \;,$$

to je $K'_x = 0$ *za ono* x *koje je rešenje jednačine*

$$(FL-ME)x^2 + (GL-NE)x + (GM-FN) = 0 \;,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Posle množenja prve vrste sa dv^2 *dobijamo*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu linije krivine.

Koristeći Rodrigovu formulu koja kaže da je za glavne pravce, tj. za pravce u kojima je glavna krivina ekstramalna, imamo još i sledeće diferencijalne jednačine linije krive:

$$d\vec{n}_o = \lambda\, d\vec{r}$$

što povlači da je

$$d\vec{r} \cdot [\vec{n} \times d\vec{n}] = 0$$

Kako u prvoj aproksimaciji $\frac{1}{2} F_2$ *predstavlja rastojanje* d *tačke* $\vec{r}(u+du, v+dv)$ *od tangentne ravni površi povučene u tački* $\vec{r}(u,v)$, *to će biti istog znaka za svako* x, *tj. za svaki pravac* $\frac{du}{dv}$ *ako je diskriminanta kvadratnog trinoma*

(b) $\quad Lx^2 + 2Mx + N$

negativna, tj. ako je $M^2 - LN < 0$ *i takva tačka površi se zove eliptična tačka. U okolini te tačke površ je sa iste strane tangentne ravni.*

Ako je diskriminanta od (b) pozitivna, tj. $M^2 - LN > 0$, *tada će postojati pravci* $\frac{du}{dv}$ *za koje je* $F_2 > 0$ *i takvi za koje je* $F_2 < 0$, *tj. površ će u toj tački biti sa razne strane tangentne ravni. Takva tačka se zove hiperbolična tačka površi. Pravci za koje je* $F_2 = 0$ *tj.* $Lx^2 + 2Mx + N = 0$ *zovu se asimptotski pravci u odredjenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ. Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi. Normalna krivina asimptotskih linija je nula. Dobijaju se kao integralne krive diferencijalne jednačine* $F_2 = 0$. *Iz svake hiperbolične tačke površi izlaze dve asimptotske linije.*

Ako je $M^2 - LN = 0$, *tada jednačina* $Lx^2 + 2Mx + N$ *ima jednu dvostruku nulu i postoji samo jedan pravac duž koje tangentna ravan dodiruje površ. Takva tačka površi zove se parabolična tačka površi.*

Ako glavna normala krive c_1 *zaklapa sa normalom površi ugao* θ, *tada je (*c_1 *leži na površi)*

$$R_1 = \pm R \cos\theta$$

gde je R_1 *poluprečnik krivine krive* c_1, *a* R *poluprečnik krivine krive* c, *koja se dobija normalnim presekom površi u tački krive* c_1 *i u pravcu iste. Oskulatorna ravan krive* c *sadrži tangentu krive* c_1 *i normalu površi. (*c *i* c_1 *imaju istu tangentu).*

Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z = 0$ *zove se linija najvećeg nagiba.*

Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.

Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

tj.

$$[\vec{r}_u' \times \vec{r}_v] \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}\,] = 0 \;.$$

Linije krivine

Krivina K površi u tački (u,v) u pravcu (du, dv) se računa po formuli

$$K = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

Pravci za koje K ima maksimalnu i minimalnu vrijednost u fiksiranoj tački (u,v) zovu se glavni pravci u toj tački.

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Diferencijalna jednačina linije krivine je

$$d\vec{r} \cdot (\vec{n} \times d\vec{n}) = 0$$

ili što je ekvivalentno

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 .$$

Odrediti linije krivine površi $\vec{r} = (u, v, u^2+v^2)$.

Rj.

Diferencijalna jednačina linije krivine je

$$d\vec{r} \cdot (\vec{n} \times d\vec{n}) = 0 .$$

$$\vec{r}\,'_u = (1, 0, 2u)$$
$$\vec{r}\,'_v = (0, 1, 2v)$$

$$\vec{n} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

$$d\vec{r} = (du, dv, 2u\,du + 2v\,dv)$$

$$d\vec{n} = (-2\,du, -2\,dv, 0)$$

Iz $d\vec{r} \cdot (\vec{n} \times d\vec{n}) = 0$ imamo

$$\begin{vmatrix} du & dv & 2u\,du + 2v\,dv \\ -2u & -2v & 1 \\ -2\,du & -2\,dv & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{III v + I v \cdot 2}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} du & dv & 2u\,du + 2v\,dv \\ -2u & -2v & 1 \\ 0 & 0 & 4u\,du + 4v\,dv \end{vmatrix} = 0$$

$$(4u\,du + 4v\,dv) \begin{vmatrix} du & dv \\ -2u & -2v \end{vmatrix} = 0 \qquad /:8$$

$$(u\,du + v\,dv)(-v\,du + u\,dv) = 0$$

$$-uv\,du^2 + (u^2 - v^2)\,du\,dv + uv\,dv^2 = 0 \qquad /:dv^2$$

$$-uv\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (u^2 - v^2)\frac{du}{dv} + uv = 0$$

$$D=(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2$$
$$=u^4+2u^2v^2+v^4=(u^2+v^2)^2$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_{1,2}=\frac{-(u^2-v^2)\pm(u^2+v^2)}{-2uv}$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_1=\frac{-u^2+v^2-u^2-v^2}{-2uv}=\frac{-2u^2}{-2uv}=\frac{u}{v}\quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dv}=\frac{u}{v}$$

$$\frac{du}{u}=\frac{dv}{v}$$

$$\ln u=\ln v+\ln C$$

$$u=Cv$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_2=\frac{-u^2+v^2+u^2+v^2}{-2uv}=\frac{2v^2}{-2uv}=-\frac{v}{u}\quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dv}=-\frac{v}{u}$$

$$u\,du=-v\,dv$$

$$u^2+v^2=C$$

Tražene linije krivine su

$$\vec{r}_1=(Cv,\ v,\ C^2v^2+v^2)$$

$$\vec{r}_2=(u,\ \pm\sqrt{c-u^2},\ C)$$

Odrediti linije krivine površi $\vec{r}=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$.

Rj. Za diferencijalnu jednačinu linije krivine možemo uzeti

$$d\vec{n}_0=\lambda\, d\vec{r}.$$

$$\vec{r}\,'_u=(\cos v,\ \sin v,\ 0)$$

$$\vec{r}\,'_v=(-u\sin v,\ u\cos v,\ a)$$

$$\vec{n}=\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}=(a\sin v,\ -a\cos v,\ u)$$

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\sin v,\ -a\cos v,\ u)$$

$$d\vec{n}_0=\frac{\partial\vec{n}_0}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{n}_0}{\partial v}dv,\quad \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}=(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}},\quad \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot(a^2+u^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2u=$$
$$=\frac{-u}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}$$

$$\vec{n}_0=\left(\frac{a\sin v}{\sqrt{a^2+u^2}},\ \frac{-a\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}},\ \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)$$

$$\left(\frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)'=\frac{\sqrt{a^2+u^2}-u\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{a^2+u^2}}\cdot 2u}{a^2+u^2}=\frac{\sqrt{a^2+u^2}-\frac{u^2}{\sqrt{a^2+u^2}}}{a^2+u^2}\ \begin{matrix}/\cdot\sqrt{a^2+u^2}\\ /\cdot\sqrt{a^2+u^2}\end{matrix}$$
$$=\frac{a^2+u^2-u^2}{(a^2+u^2)\sqrt{a^2+u^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}$$

Prema tome

$$\vec{n}\,'_{0_u}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}(-au\sin v,\ au\cos v,\ a^2)$$

$$\vec{n}\,'_{0_v}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)}}(a\cos v,\ a\sin v,\ 0)=\frac{a^2+u^2}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}(a\cos v, a\sin v, 0)$$

$$d\vec{n}_0=\vec{n}\,'_{0_u}du+\vec{n}\,'_{0_v}dv=$$

$$= \frac{1}{(a^2+u^2)^{3/2}} \left(-au\sin v\, du + a(a^2+u^2)\cos v\, dv,\right.$$
$$\left. au\cos v\, du + a(a^2+u^2)\sin v\, dv,\quad a^2 du\right)$$

Dalje

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'_u\, du + \vec{r}\,'_v\, dv =$$
$$= (\cos v\, du - u\sin v\, dv,\ \sin v\, du + u\cos v\, dv,\ a\, dv)$$

Sada, kako smo za diferencijalnu jednačinu linija krivina uzeli $d\vec{n}_0 = \lambda\, d\vec{r}$ imamo $\lambda = \frac{d\vec{n}_0}{d\vec{r}}$

$$\frac{-au\sin v\, du + a(a^2+u^2)\cos v\, dv}{\cos v\, du - u\sin v\, dv} = \frac{au\cos v\, du + a(a^2+u^2)\sin v\, dv}{\sin v\, du + u\cos v\, dv}$$

$$= \frac{a^2 du}{a\, dv}$$

Izjednačavanjem bilo koja dva razlomka gornje jednačine dobijamo istu diferencijalnu jednačinu (npr. izjednačimo zadnja dva razlomka) $\underline{a^2 u\cos v\, du\, dv} + a^2(a^2+u^2)\sin v\, dv^2$

$$= a^2\sin v\, du^2 + \underline{a^2 u\cos v\, du\, dv} \qquad /:a^2 \;/:\sin v$$

$$(a^2+v^2)\, dv^2 = du^2$$

$$dv = \pm \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} \quad \text{čije je rješenje}$$

$$v = \pm \ln(u + \sqrt{a^2+u^2}) + C$$

Linije krivine su

$$\vec{r}_{1,2} = \left(u\cos(\pm\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})+C),\ u\sin(\pm\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})+C),\ \pm a\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})+C\right)$$

Zadaci za vježbu

1. Odrediti linije krivine na sljedećim površinama:

a) hiperboličkom paraboloidu: $z = axy$;

Uputa:

Diferencijalna linija krivine na površ $z = f(x,y)$ glasi

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1+q^2 & pq & 1+p^2 \\ t & s & r \end{vmatrix} = 0,$$

pa je $\ln(ay + \sqrt{1+a^2y^2}) \pm \ln(ax + \sqrt{1+a^2x^2}) = \text{const.}$

b) rotacionoj plohi

$x = f(u)\cos v,\ y = f(u)\sin v,\ z = \phi(u),\ u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi]$;

Uputa:

Merdijani i paralele ($u = C_1$, $v = C_2$).

c) kružnom valjku

$x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u,\ u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi]$;

Uputa:

Koordinatne krive (paralele i merdijani, koji su izvodnice valjka).

d) kružnom stošcu (kupa)

$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = ku,\ u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi]$;

Uputa:

Koordinatne krive (izvodnice stošca i njihove ortogonalne trajektorije).

e) na plohi $\vec{r} = (u^2+v^2,\ u^2-v^2,\ v),\ u, v \in \mathbb{R}$;

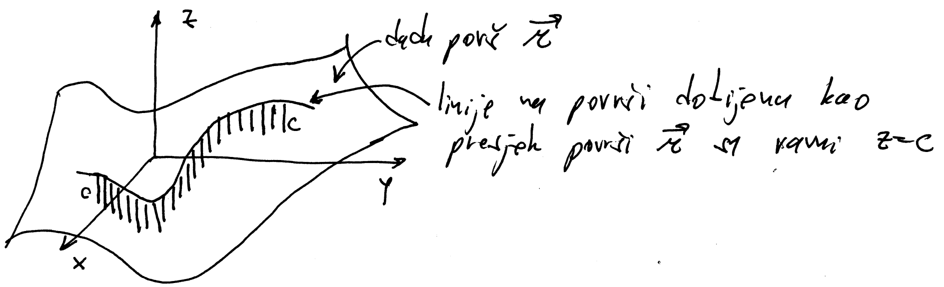
Uputa: koordinatne krive

Linije najvećeg nagiba

Kriva na površi koja je normalna na nivovsku liniju površi z=0 zove se linija najvećeg nagiba.

Kada su dvije krive normalne jedna na drugu?

Nivovske linije (nivo linije, izo linije) površi $u=f(x,y,z)$ su krive na površi koje su ujedno i krive u dvodimenzionalnom skalarnom polju zadane jednačinom $z=f(x,y)$, $z=c$ $(c\in R)$



Trajektorija je neprekidna kriva koju opisuje materijalna tačka prilikom kretanja. Kretanje se može odrediti sistemom diferencijalnih jednačina. U tom slučaju govori se o sistemu diferencijalnih jednačina.

Linije najvećeg nagiba možemo odrediti tako što rješenja diferencijalne jednačine: $d\vec r_{(z=c)}\cdot d\vec r_N=0$

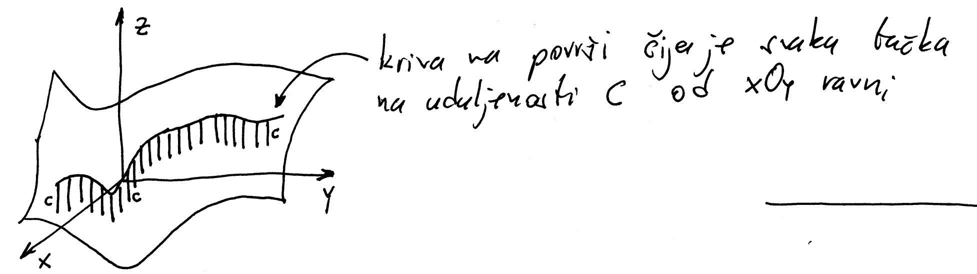
uvrstimo u datu površ $\vec r=\vec r(u,v)$.

($\vec r_N$ je nivovska linija za koju je $z=c$. $d\vec r_{(z=c)}$ je diferencijal f-je $\vec r$ poslije čega je stavljeno $z=c$)

Odrediti linije najvećeg nagiba površi $\vec r=(u\cos v, u\sin v, \frac{1}{u})$.

Rj.: Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi z=0 zove se linija najvećeg nagiba.

Nivo linije ili nivovske linije ili izolinije površi $u=f(x,y,z)$ su krive na površi (krive u dvodimenzionalnom skalarnom polju) zadane jednačinom $z=f(x,y)$, $z=C$ $(C\in R)$.



Linija najvećeg nagiba je normalna na nivovsku liniju za koju je $z=C_1=\frac{1}{u}=\frac{1}{C}$ tj. na krivu

$$\vec r_N=(C\cos v, C\sin v, \frac{1}{C})$$

tj. $d\vec r_{(u=c)}\cdot d\vec r_N=0$.

$$d\vec r=(\cos v\,du-u\sin v\,dv, \sin v\,du+u\cos v\,dv, -\frac{du}{u^2})$$

$$d\vec r_{(u=c)}=(\cos v\,du-C\sin v\,dv, \sin v\,du+C\cos v\,dv, -\frac{dv}{c^2})$$

$$d\vec r_N=(-C\sin v\,dv, C\cos v\,dv, 0)$$

$$d\vec r_{(u=c)}\cdot d\vec r_N=0$$

$$\underline{-C\sin v\cos v\,du\,dv}+C^2\sin^2 v\,dv^2+\underline{C\cos v\sin v\,du\,dv}+C^2\cos^2 v\,dv^2=0$$

To je diferencijalna jednačina linije najvećeg nagiba:

$$c^2 dv^2 = 0.$$

$$dv = 0$$

$$v = k, \quad k\text{-konstanta}$$

Linije najvećeg nagiba imaju jednačinu

$$\vec{r} = (u\cos k,\ u\sin k,\ \tfrac{1}{u})$$

Odrediti linije najvećeg nagiba površi

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u+v).$$

Rj.

Kriva na površi koja je normalna na nivovsku liniju površi $z=0$ zove se linija najvećeg nagiba.

Linije najvećeg nagiba su normalne na nivovske linije $z = C = u+v \iff u = C-v$) čija je jednačina
($z = u+v = C$)

$$\vec{r}_N = ((C-v)\cos v,\ (C-v)\sin v,\ C)$$

Diferencijalna jednačina nivovskih linija je

$$d\vec{r}_{(u+v=c)} \cdot d\vec{r}_N = 0$$

Kako je

$$d\vec{r}_N = (-\cos v - (C-v)\sin v,\ -\sin v + (C-v)\cos v,\ 0)$$

$$d\vec{r} = (\cos v\, du - u\sin v\, dv,\ \sin v\, du + u\cos v\, dv,\ du+dv)$$

$$d\vec{r}_{(u+v=c)} = (\cos v\, du - (C-v)\sin v\, dv,\ \sin v\, du + (C-v)\cos v\, dv,\ du+dv)$$

to je

$$d\vec{r}_N \cdot d\vec{r}_{(u+v=c)} = -\cos^2 v\, du + \underline{(C-v)\sin v\cos v\, dv} -$$

$$\underline{\underline{-(C-v)\sin v\cos v\, du}} + (C-v)^2\sin^2 v\, dv - \sin^2 v\, du -$$

$$\underline{-(C-v)\sin v\cos v\, dv} + \underline{\underline{(C-v)\cos v\sin v\, du}} +$$

$$+ (C-v)^2\cos^2 v\, dv = 0$$

$$-du + (C-v)^2 dv = 0$$

$$du = (C-v)^2 dv \Rightarrow \boxed{u = C^2 v - Cv^2 + \tfrac{1}{3}v^3 + C_1 = f(v)}$$

$$C^2 - 2Cv + v^2$$

Prema tome jednačina nivovskih linija je

$$\vec{r} = (f(v)\cos v,\ f(v)\sin v,\ f(v)+v).$$

§ 9. Druga diferencijalna forma

9.1. Druga diferencijalna ili kvadratna forma plohe

Neka je ploha S zadana svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u,\, v) = x(u,\, v)\,\vec{i} + y(u,\, v)\,\vec{j} + z(u,\, v)\,\vec{k}, \quad (u,\, v) \in D.$$

Tada se na plohi S definiraju funkcije $L,\, M,\, N : D \to \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$L = \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\right),$$

$$M = \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\right), \tag{1}$$

$$N = \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\right),$$

odnosno koordinatno:

$$L = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} \tag{1*}$$

$$N = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

Funkcija $L,\, M$ i N zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama drugog reda* ($W = \sqrt{EG - F^2}$).

a) Neka je nadalje zadana krivulja α na plohi S svojim jednadžbama $u = u(s)$, $v = v(s)$, tj.

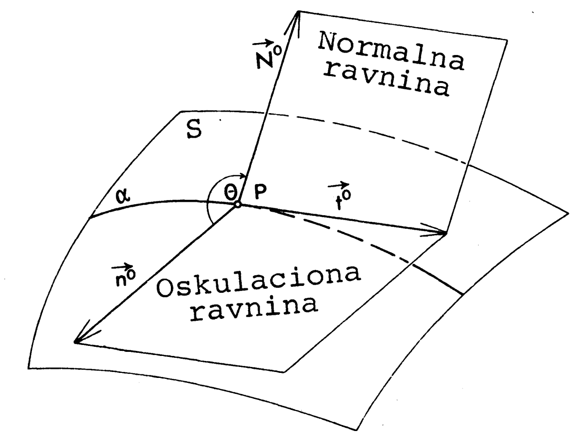
$$\vec{r} = \vec{r}[u(s),\ v(s)], \tag{2}$$

gdje je s duljina luka krivulje α. Tada vrijedi:

$$\vec{N}^0 \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \varkappa \cos\theta, \tag{3}$$

gdje je $\varkappa$ zakrivljenost krivulje α u nekoj točki P, θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P (sl. 44).

Relacija (3) dade se napisati u obliku:



Sl. 44.

$$\varkappa \cos\theta = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \equiv \mathrm{II}. \tag{4}$$

Desna strana izraza (4) zove se *druga diferencijalna ili druga kvadratna forma plohe* i označuje s II.

b) Ako je krivulja α na plohi umjesto parametrom s parametrizirana nekim parametrom λ, koji nije duljina luka,
$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(u(\lambda),\, v(\lambda))$, onda relacija (4) prelazi u:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + N\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}{E\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + G\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}, \tag{5}$$

odnosno:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2} \equiv \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{6}$$

Desna strana izraza (6) je kvocijent druge i prve diferencijalne forme plohe.

9.2. Normalni i kosi presjek plohe

Ravnina koja prolazi jednim pravcem tangentne ravnine, tj. smjerom $\vec{t}^0$ ili $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ i normalom $\vec{N}^0$ na plohu u točki P plohe S siječe ovu plohu u ravninskoj krivulji γ koja se zove *normalni presjek plohe S u točki P u smjeru vektora* t^0.

Svaka druga ravnina koja prolazi istim pravcem (tj. smjerom $\vec{t}^0$) ali ne normalom $\vec{N}^0$ plohe S, siječe ovu plohu u krivulji koja se zove *kosi presjek*.

9.3. Normalna zakrivljenost plohe u danom smjeru

To je zakrivljenost K_n normalnog presjeka u tom smjeru. Normalnoj zakrivljenosti pridružujemo predznak na ovaj način: kut $\theta = 0$ ili π, jer su vektori $\vec{n}^0$ i $\vec{N}^0$ glavne normale normalnog presjeka i normale na plohu kolinearni (istog ili suprotnog smjera). Pri tome uzimamo da je $K_n > 0$ ako je normalni presjek u točki P plohe S zakrivljen prema vektoru $\vec{N}^0$ normale na plohu, a $K_n < 0$ ako je on zakrivljen od vektora $\vec{N}^0$. Pokazuje se da je normalna zakrivljenost u smjeru $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ dana izrazom (prema (5) ili (6)):

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{7}$$

9.4. Meusnierov teorem

Ovaj teorem povezuje zakrivljenost K_n normalnog i $\varkappa$ kosog presjeka i dan je relacijom:

$$K_n = \varkappa \cos\theta, \tag{8}$$

gdje je θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P plohe sa zajedničkom tangentom.

Odavde proizlazi da od svih krivulja na polohi koje prolaze jednom točkom i imaju zajedničku tangentu najmanju zakrivljenost u toj točki ima normalni presjek plohe.

Zakrivljenost plohe definira se pomoću zakrivljenosti krivulja na plohi.

$\frac{1}{K_n}$ i $\frac{1}{\varkappa}$ zovu se radiusi zakrivljenosti normalnog i kosog presjeka.

9.5. Glavne zakrivljenosti. Glavni smjerovi

Neka je zadana ploha S i neka je funkcija normalne zakrivljenosti:

$$K_n(\mu) = \frac{L\mu^2 + 2M\mu + N}{E\mu^2 + 2F\mu + G}, \text{ gdje je } \mu = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}. \tag{9}$$

Tada minimalnu i maksimalnu vrijednost te funkcije (ako postoje) zovemo *glavnim zakrivljenostima* plohe S u točki P i označavamo ih sa K_1 i K_2. Smjerovi u kojima te zakrivljenosti dolaze zovu se *glavni smjerovi* u točki P i označujemo ih sa μ_1 i μ_2. Glavne zakrivljenosti u točki P plohe S jesu korijeni K_1 i K_2 kvadratne jednadžbe:

$$K_n^2 - \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} K_n + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0. \tag{10}$$

Glavne zakrivljenosti dobiju se kao ekstremne vrijednosti funkcije (9), tj. kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu) \equiv K_n(E\mu^2 + 2F\mu + G) - (L\mu^2 + 2M\mu + N) = 0, \tag{11}$$

gdje je $\mu = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$.

Veličine $\frac{1}{K_1}$ i $\frac{1}{K_2}$ zovu se glavni polumjeri zakrivljenosti.

Glavni smjerovi μ_1 i μ_2 plohe S u točki P dobiju se također kao ekstremne vrijednosti funkcije (10) (eliminiravši pri računanju K_n).

Glavni smjerovi μ_1 i μ_2 su prema tome korijeni kvadratne jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

u točki P plohe S.

9.6. Eulerov poučak. Dupinova indikatrisa. Rodriguesov teorem

a) *Eulerov poučak* glasi:

$$K_n = K_1 \cos^2\alpha + K_2 \sin^2\alpha. \tag{13}$$

Pomoću tog poučka možemo izračunati normalnu zakrivljenost K_n pomoću glavnih zakrivljenosti K_1 i K_2 i pomoću kuta α. Pritom je α kut što ga zatvara vektor tangente normalnog presjeka i glavni smjer u točki P plohe S.

b) *Rodriguesov teorem* je specijalni slučaj Eulerove formule u slučaju da je vektor tangente normalnog presjeka u točki P ujedno glavni smjer, a glasi:

$$\mathrm{d}\vec{N}^0 = -K_n \mathrm{d}\vec{r}, \tag{14}$$

gdje je $\vec{N}^0$ ort normale na plohu S u točki P.

c) Eulerovu formulu možemo interpretirati geometrijski. Uočimo na plohi S normalni presjek u točki P plohe S i u njoj tangencijalnu ravninu. Na tangenti normalnog presjeka u točki P uočimo točku T takvu da je $\overline{PT} = \sqrt{\frac{1}{|K_n|}}$. Skup tako dobivenih točaka T u tangencijalnoj ravnini zove se *Dupinova indikatrisa plohe S u točki P.* Pokazuje se da je Dupinova indikatrisa konika koja leži u tangencijalnoj ravnini u točki P plohe S, da joj je središte u točki P i (prema (13)) ukoliko se parametarska mreža podudara s mrežom krivulja zakrivljenosti (vidi § 9.9) ona ima jednadžbu:

$$K_1 x^2 + K_2 y^2 = \pm 1, \quad \text{(vidi sl. 45)} \tag{15}$$

gdje je:

$$x = \sqrt{\frac{1}{|K_n|}} \cos\alpha,$$

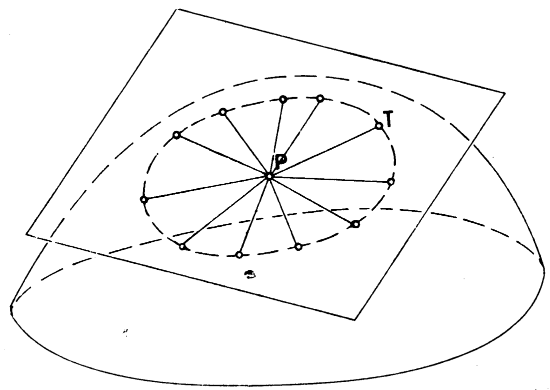
$$y = \sqrt{\frac{1}{|K_n|}} \sin\alpha,$$

a koordinate osi x i y su tangente na glavne krivulje zakrivljenosti, ishodište koordinatnog sustava je u točki P.

Prema (7) Dupinova indikatrisa ima jednadžbu:

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1,$$

gdje je točka P ishodište koordinatnog sustava u tangencijalnoj ravnini s osima koje se poklapaju sa $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$.



Sl. 45.

9.7. Gaussova zakrivljenost. Srednja zakrivljenost

a) Gaussova (potpuna ili totalna) zakrivljenost K plohe S u točki P je funkcija $K: S \to \mathbf{R}$ definirana formulom (vidi (10)):

$$K = K_1 K_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{16}$$

Kako je $EG - F^2 = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2$ (vidi (§ 8.4) uvijek pozitivno, to će predznak od K ovisiti jedino o predznaku od $LN - M^2$.

b) Srednja zakrivljenost H plohe S u točki P je funkcija $H: S \to \mathbf{R}$ definirana formulom (vidi (10)):

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{EN - 2FM + LG}{2(EG - F^2)}. \tag{17}$$

c) Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 u točki P plohe S osim po (10) i (11) mogu se računati i ovako.

Budući da je prema (16) i (17):

$$K = K_1 K_2,$$

$$H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2),$$

to su K_1 i K_2 po Vietovim formulama korijeni kvadratne jednadžbe:

$$x^2 - 2Kx + K = 0, \tag{18}$$

dakle:

$$K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \tag{19}$$

d) Plohe kod kojih je srednja zakrivljenost u svakoj točki jednaka nuli, tj. $H = 0$ zovu se *minimalne plohe.* Plohe kod kojih je Gaussova zakrivljenost u svakoj točki konstantna zovemo *plohe s konstantnom zakrivljenosti.* Takve su *kugla* s $K = \text{const.} > 0$ i pseudosfera s $K = \text{const.} < 0$ (vidi zad. 341. i 322).

9.8. Pravčaste i razvojne plohe

Ploha S je *pravčasta* ako za svaku njenu točku P postoji bar jedan pravac p takav da on leži na plohi. Ploha S je *razvojna* ako je za sve točke $P \in S$ totalna ili Gaussova zakrivljenost $K(P) = 0$. Pravčasta ploha koja nije razvojna zove se *vitopera pravčasta ploha.*

Svaka razvojna ploha je pravčasta, i to ili stožasta ili valjkasta ploha ili tangentna ploha prostorne krivulje. Vitopere plohe su npr. jednokrilni hiperboloid, hiperbolički paraboloid i helikoid. Svaka razvojna ploha dade se izometrički preslikati u ravninu, tj. razviti u ravninu (vidi § 11.1.b). Odatle i naziv razvojna ploha.

9.9. Glavne krivulje zakrivljenosti

Krivulje zakrivljenosti plohe S su one krivulje na plohi čija je tangenta u svakoj točki paralelna s jednim od dva glavna smjera μ_1 i μ_2. Krivulje zakrivljenosti $v = v(u)$ dobiju se rješavanjem diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Krivulje zakrivljenosti na plohi S tvore ortogonalnu mrežu na toj plohi (vidi zad. 298).

Koordinatne u i v krivulje na plohi S su ujedno i krivulje zakrivljenosti na plohi S onda i samo onda ako u svakoj točki plohe vrijedi:

$$F=0 \quad \text{i} \quad M=0. \tag{21}$$

Ovo proizlazi iz jednadžbe (20) za $du=0$ i $dv=0$ i $F=0$.

9.10. Asimptotske linije. Asimptotski smjerovi

a) *Asimptotski smjer* (pravac) je takav smjer $\bar{\mu}=\dfrac{du}{dv}$ u kojem je normalna zakrivljenost K_n jednaka nuli i dobiva se kao rješenje jednadžbe:

$$L\mu^2+2M\mu+N=0. \tag{22}$$

b) Krivulja na plohi zove se *asimptotska linija,* ako je smjer u svakoj njenoj točki asimptotski smjer. U svakoj točki asimptotske linije je $K_n=0$, pa diferencijalna jednadžba asimptotskih linija glasi:

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0. \tag{23}$$

Asimptotska linija je ujedno ona krivulja na plohi kod koje se tangencijalna ravnina plohe podudara u svakoj točki s oskulacionom ravninom te krivulje. Tada glavna normala $\vec{n}^0$ asimptotske linije čini s normalom na plohu $\vec{N}^0$ kut $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, pa je zbog (8) $K_n=0$ (vidi zad. 387).

9.11. Klasifikacija točaka na plohi. Kružne, eliptičke, hiperboličke, paraboličke točke plohe

Oblik plohe u okolini neke točke P plohe S ovisit će o tipu točke na plohi. Da bismo objasnili što pod time razumijevamo promatrat ćemo u točki P predznak izraza $LN-M^2$ koji je u vezi s normalnom zakrivljenosti K_n (formula (7)). Naime, predznak od K_n ovisi samo o brojniku, jer je nazivnik uvijek pozitivan. M^2-LN je diskriminanta brojnika u formuli (7). Predznak od $LN-M^2$ još je u vezi s glavnim zakrivljenostima (formula (10)), te s Gaussovom zakrivljenosti (formula (16)).

a) *Kružna (ili sferna ili ombilička) točka plohe* je takva točka plohe za koju vrijedi:

$$L:M:N=E:F:G. \tag{24}$$

U toj je točki normalna zakrivljenost $K_n=\text{const}$. Kružna točka je specijalan slučaj eliptičke. U kružnoj točki svaki smjer μ je ujedno i glavni smjer. Tada je, naime, lijeva strana od (12) identički jednaka nuli, pa (12) zadovoljava svaki μ. Gaussova je zakrivljenost $K>0$ u kružnoj točki. Dupinova indikatrisa je u kružnoj točki kružnica ($K_1=K_2$ u (15)). U okolini kružne točke ploha leži sva s jedne strane tangentne ravnine.

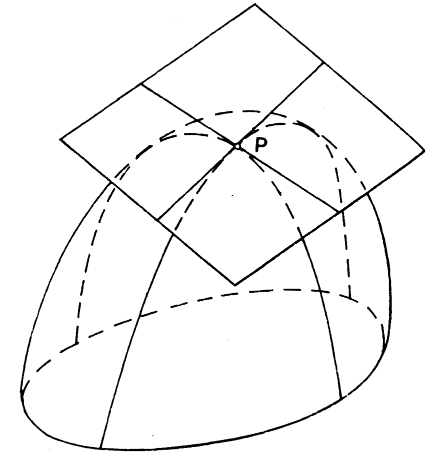
Na sferi je svaka točka kružna.

b) *Eliptička točka plohe* (sl. 46) je takva točka plohe za koju je:

$$LN-M^2>0. \tag{25}$$

U takvoj točki normalna zakrivljenost K_n u formuli (7) ne mijenja predznak mijenjanjem $\mu=\dfrac{du}{dv}$. To znači da u okolini oko eliptičke točke ploha leži sva s jedne strane tangentne ravnine. U eliptičkoj točki postoje dva realna glavna smjera i dvije krivulje zakrivljenosti, koje su međusobno okomite (vidi (12) i (20)). Gaussova zakrivljenost je $K>0$ (zbog (16) i (25)), pa zbog toga za glavne zakrivljenosti vrijedi:

$$\operatorname{sign} K_1=\operatorname{sign} K_2.$$



Sl. 46.

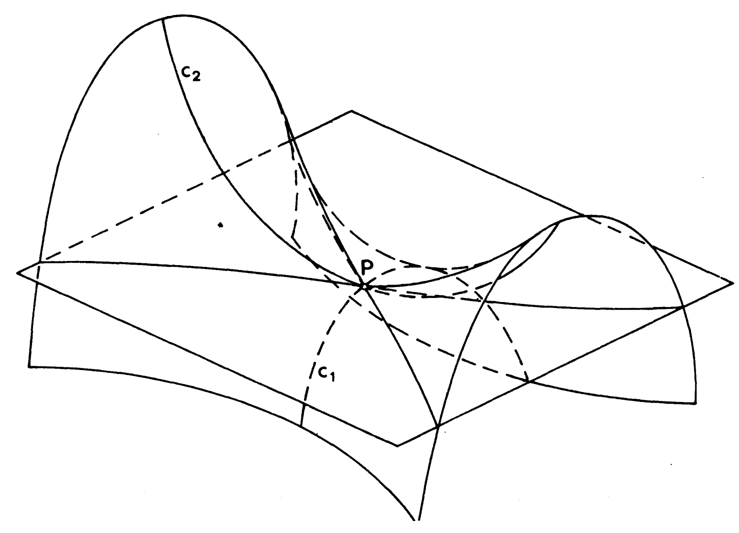
Zbog istog predznaka od K_1 i K_2 Dupinova indikatrisa je u eliptičkoj točki elipsa.

Sve točke elipsoida su eliptičke. Eliptičke točke su još točke na eliptičkom paraboloidu, eliptičkom hiperboloidu i na dvokrilnom (dvoplošnom) hiperboloidu.

c) *Hiperbolička točka plohe* (sl. 47) je takva točka plohe za koju je:

$$LN-M^2<0. \tag{26}$$

U takvoj točki normalna zakrivljenost K_n u formuli (7) mijenja predznak mijenjanjem μ.



Sl. 47.

Stoga je $K_n = 0$ za dva smjera $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$. To su asimptotski smjerovi. U hiperboličkoj točki plohe prema tome postoje *dva asimptotska smjera* (u eliptičkoj i kružnoj točki nema asimptotskih smjerova). To znači da asimptotski smjerovi $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$ rastavljaju okolinu hiperboličke točke na četiri dijela: dva nasuprotna ispod, a dva preostala nasuprotna iznad tangencijalne ravnine. U hiperboličkoj točki postoje dva realna glavna smjera (diskriminanta jednadžbe (12) je pozitivna) i dvije međusobno okomite krivulje zakrivljenosti. Gaussova zakrivljenost je $K < 0$ (zbog (16) i (26)), pa za hiperboličke točke vrijedi:

$$\operatorname{sign} K_1 = -\operatorname{sign} K_2.$$

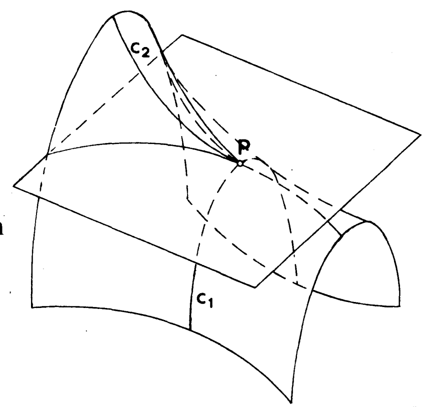
Zbog protivnog predznaka od K_1 i K_2 Dupinova indikatrisa je u hiperboličkoj točki par konjugiranih hiperbola. Sve točke jednokrilnog hiperboloida su hiperboličke (vidi zad. 207. i 229). Točke hiperboličkog paraboloida su hiperboličke.

d) *Parabolička točka plohe* (sl. 48) je takva točka plohe za koju je:

$$LN - M^2 = 0. \tag{27}$$

U takvoj točki normalna zakrivljenost K_n ne mijenja predznak mijenjanjem μ.

Gaussova zakrivljenost $K = 0$, pa je barem jedna od glavnih zakrivljenosti jednaka nuli ($K = K_1 K_2 = 0 \Rightarrow K_1 = 0$ ili $K_2 = 0$ ili oboje).



Sl. 48.

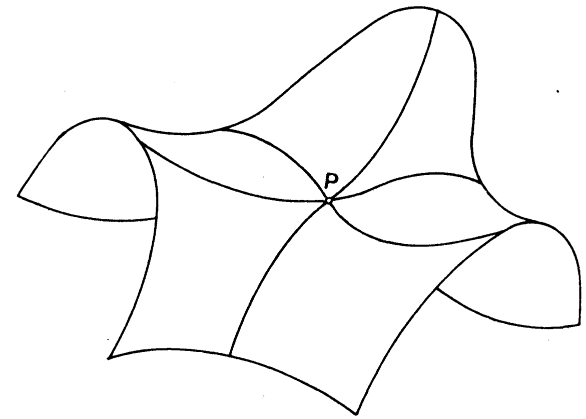
Ograničimo se najprije na slučaj $K_1 = 0$, $K_2 \neq 0$ (ili obratno).

Dvostruka vrijednost μ_0 kojoj pripada normalna zakrivljenost $K_n = K_1$ je, dakle, istovremeno i asimptotski i glavni smjer. To je ujedno i jedini asimptotski smjer, a glavni smjer postoji upravo još jedan koji je okomit na njega i kome pripada normalna zakrivljenost K_2.

Stoga takvom točkom prolaze dvije međusobno ortogonalne krivulje zakrivljenosti. Dupinova indikatrisa raspada se na dva paralelna pravca. Sve točke valjka i stošca su paraboličke. Točke torusa koje leže na najvišoj i najnižoj kružnici (vidi sl. 42, str. 111) također su paraboličke. Vrlo je čest slučaj da krivulja na plohi koja se sastoji od paraboličkih točaka razdvaja područje hiperboličkih od područja eliptičkih točaka (vidi zad. 394).

e) Specijalni slučaj paraboličke točke kada je $K_1 = K_2 = 0$ naziva se *ravninskom točkom* ili *točkom spljoštenosti.* Jasno je da je svaki smjer glavni, a ujedno i asimptotski. Jednostavan primjer je ravnina kod koje je svaka točka ravninska. U ravnini je čak i svaka krivulja, krivulja zakrivljenosti. Međutim, okolina

ravninske točke može biti i veoma komplicirana, kao što pokazuje primjer majmunskog sedla koje ima jednu jedinu ravninsku točku P (vidi sl. 49. na kojoj su prikazane i *tri* krivulje zakrivljenosti koje prolaze točkom P).



Sl. 49.

Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcije "Druga diferencijalna forma")

316. Naći drugu kvadratnu formu za zavojnu plohu (helikoid):

$$x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv,\ u, v \in \mathbf{R}.\ \text{(Vidi zad. 220.)}$$

Vektorska jednadžba plohe glasi:

$$\vec{r} = au\cos v\,\vec{i} + au\sin v\,\vec{j} + bv\,\vec{k}.$$

Tada su Gaussove veličine prvoga reda:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + (0)^2 = a^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = (au\sin v)^2 + (au\cos v)^2 + (b)^2 = a^2u^2 + b^2,$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -a^2u\sin v\cos v + a^2u\sin v\cos u + 0 \cdot b = 0,$$

a diskriminanta prve kvadratne forme

$$W^2 = EG - F^2 = (a^2u^2 + b^2)\,a^2.$$

Kako su Gaussove veličine drugoga reda dane s:

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uu}), \quad M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uv}), \quad N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{vv}),$$

to računajmo mješovite produkte:

$$(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uu}) = \begin{vmatrix} a\cos v & a\sin v & 0 \\ -au\sin v & au\cos v & b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uv}) = \begin{vmatrix} a\cos v & a\sin v & 0 \\ -au\sin v & au\cos v & b \\ -a\sin v & a\cos v & 0 \end{vmatrix} = -a^2b,$$

$$(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{vv}) = \begin{vmatrix} a\cos v & a\sin v & 0 \\ -au\sin v & au\cos v & b \\ -au\cos v & -au\sin v & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Dakle je } L = 0, \quad M = -\frac{ab}{\sqrt{a^2u^2 + b^2}}, \quad N = 0,$$

pa druga diferencijalna forma helikoida glasi:

$$\mathrm{II} \equiv -\frac{2ab}{\sqrt{a^2u^2 + b^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

317. Pokazati:

1° da je druga kvadratna forma ravnine identički jednaka nuli.

2° da je druga kvadratna forma sfere proporcionalna prvoj.

1° Prema zad. 216. parametarske jednadžbe ravnine glase:

$$x = x_0 + l_1u + l_2v$$
$$y = y_0 + m_1u + m_2v$$
$$z = z_0 + n_1u + n_2v \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

Kako je:

$$\ddot{\vec{r}}_{uu} = 0, \quad \ddot{\vec{r}}_{uv} = 0, \quad \ddot{\vec{r}}_{vv} = 0$$

to je i

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uu}) = 0, \quad M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uv}) = 0,$$

$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{vv}) = 0,$$

pa je druga kvadratna forma identički jednaka nuli, tj.:

$$\mathrm{II} \equiv 0.$$

(Vidi zad. 267.)

2° Prema zad. 204. i 266. vektorska jednadžba sfere glasi:

$$\vec{r} = \{ r\cos\phi\sin\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\theta \},\ \phi\in[0,2\pi],\ \theta\in[0,\pi],$$

a Gaussove veličine prvog reda:

$$E = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right)^2 = r^2\sin^2\theta,\quad G = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right)^2 = r^2,\quad F = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = 0,$$

pa je prva diferencijalna forma dana s:

$$I = r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Jer je $W^2 = EG - F^2 = r^4\sin^2\theta$, to su koeficijenti druge kvadratne forme redom:

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_\phi, \dot{\vec{r}}_\theta, \ddot{\vec{r}}_{\phi\phi}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & 0 \\ r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\theta \\ -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r\sin\theta}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta \end{vmatrix} = r\sin^2\theta.$$

$$M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_\phi, \dot{\vec{r}}_\theta, \ddot{\vec{r}}_{\phi\theta}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & 0 \\ r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\theta \\ -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_\phi, \dot{\vec{r}}_\theta, \ddot{\vec{r}}_{\theta\theta}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & 0 \\ r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\theta \\ -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r^3}{r^2\sin\theta}(\sin^2\phi\sin\theta\cos^2\theta + \cos^2\phi\sin^3\theta + \sin^2\phi\sin^3\theta +$$

$$+ \cos^2\phi\sin\theta\cos^2\theta) = r.$$

Druga diferencijalna forma dakle glasi:

$$\mathrm{II} = r\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + r\,\mathrm{d}\theta^2,$$

pa je zaista:

$$\mathrm{I} = r\,\mathrm{II}.$$

318. Naći drugu diferencijalnu formu plohe zadane jednadžbom:

$$z = f(x, y).$$

Prema zad. 214. i 270. imamo:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + f(x, y)\,\vec{k},$$
$$E = 1 + p^2,\quad G = 1 + q^2,\quad F = p\cdot q,$$
$$W^2 = EG - F^2 = (1+p^2)\ (1+q^2) - p^2q^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Gaussove veličine drugog reda jesu:

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_x, \dot{\vec{r}}_y, \ddot{\vec{r}}_{xx}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_x, \dot{\vec{r}}_y, \ddot{\vec{r}}_{xy}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_x, \dot{\vec{r}}_y, \ddot{\vec{r}}_{yy}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

gdje su prema § 7. $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ i $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Druga diferencijalna forma, dakle, glasi:

$$\mathrm{II} = \frac{r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

319. Naći drugu kvadratnu formu za rotacionu plohu (vidi zad. 215):

$$\vec{r} = \{\phi(u)\cos v,\ \phi(u)\sin v,\ \psi(u)\}.$$

Kako je prema zad. 268:

$$E = \phi'^2 + \psi'^2,\quad F = 0,\quad G = \phi^2,$$
$$W^2 = EG - F^2 = \phi^2(\phi'^2 + \psi'^2),$$

tamo imamo dalje:

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uu}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \phi'\cos & \phi'\sin v & \psi' \\ -\phi\sin v & \phi\cos v & 0 \\ \phi''\cos v & \phi''\sin v & \psi'' \end{vmatrix};$$

$$L = \frac{\phi'\psi'' - \phi''\psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}.$$

$$M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uv}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \phi'\cos & \phi'\sin v & \psi' \\ -\phi\sin v & \phi\cos v & 0 \\ -\phi'\sin v & -\phi'\cos v & 0 \end{vmatrix};$$

$M = 0.$

$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{vv}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \phi'\cos & \phi'\sin v & \psi' \\ -\phi\sin v & \phi\cos v & 0 \\ -\phi\cos v & -\phi\sin v & 0 \end{vmatrix};$$

$$N = \frac{\phi\psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}.$$

Druga diferencijalna forma glasi:

$$\mathrm{II} = \frac{(\phi'\psi'' - \phi''\psi')\,\mathrm{d}u^2 + \phi\psi'\,\mathrm{d}v^2}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}.$$

320. Zadana je zavojna ploha (helikoid).

$$x = au\cos v, \quad y = au\sin v, \quad z = mv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

1° Naći normalnu zakrivljenost helikoida.
2° Naći glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te ispitati vrstu točaka na helikoidu.
3° Naći glavne smjerove helikoida.
4° Naći (glavne) krivulje zakrivljenosti helikoida.

1° Kako je (vidi zad. 220, 288 i 316):

$$E = a^2, \quad G = a^2u^2 + m^2, \quad F = 0$$

$$L = 0, \quad N = 0, \qquad M = -\frac{am}{\sqrt{a^2u^2 + m^2}},$$

to je normalna zakrivljenost prema (7) iz § 9:

$$K_n = \frac{L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2},$$

odnosno:

$$K_n = \frac{-\dfrac{2am}{\sqrt{a^2u^2 + m^2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{a^2\mathrm{d}u^2 + (a^2u^2 + m^2)\,\mathrm{d}v^2}.$$

2° Glavne zakrivljenosti naći ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$K_n = \frac{-\dfrac{2am}{\sqrt{a^2u^2 + m^2}}\,\mu}{a^2\mu^2 + (a^2u^2 + m^2)}, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$$

u implicitnom obliku:

$$F(\mu) \equiv K_n a^2\mu^2 + \frac{2am}{\sqrt{a^2u^2 + m^2}}\,\mu + K_n(a^2u^2 + m^2) = 0.$$

Potražimo ekstrem:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2K_n a^2\mu + \frac{2am}{\sqrt{a^2u^2 + m^2}} = 0.$$

Eliminiramo li iz posljednje dvije jednadžbe μ dobit ćemo jednadžbu:

$$K_n^2 = \frac{m^2}{(a^2u^2 + m^2)^2},$$

čija rješenja predstavljaju glavne zakrivljenosti:

$$K_{1,2} = \pm\frac{m}{a^2u^2 + m^2}.$$

Drugi način računanja glavnih zakrivljenosti je pomoću (18) i (19). Kako je prema (16):

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{m^2}{(a^2u^2 + m^2)},$$

a prema (17):

$$H = \frac{EN - 2FM + LG}{2(EG - F^2)} = 0,$$

to glavne zakrivljenosti dobijemo kao rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x^2 - 2Hx + K = 0,$$

odnosno:

$$x^2 = \frac{m^2}{a^2u^2 + m^2}, \text{ tj.}$$

$$K_{1,2} = \pm\frac{m}{a^2u^2 + m^2}.$$

Točke na helikoidu su hiperboličke, jer je $\operatorname{sign} K_1 = -\operatorname{sign} K_2$.

Gaussova zakrivljenost jest:

$$K = K_1K_2 = -\frac{m^2}{(a^2u^2 + m^2)^2}.$$

Vidimo da je Gaussova zakrivljenost negativna, što je također karakteristika hiperboličkih točaka.

Srednja zakrivljenost jest:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = 0.$$

Helikoid je, prema tome, minimalna ploha.

3° Glavne smjerove dobit ćemo kao rješenja jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ a^2 u^2 + m^2 & 0 & a^2 \\ 0 & -\dfrac{am}{\sqrt{a^2 u^2 + m^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ili:

$$a^2 m \mu^2 = m (a^2 u^2 + m^2),$$

čija rješenja jesu glavni smjerovi:

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2 u^2 + m^2}.$$

Drugi način:

Glavne smjerove helikoida dobit ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu) = K_n a^2 \mu^2 + \frac{2ma}{\sqrt{a^2 u^2 + m^2}} \mu + K_n (a^2 u^2 + m^2) = 0.$$

Odavde je:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2 K_n a^2 \mu + \frac{2ma}{\sqrt{a^2 u^2 + m^2}} = 0.$$

Eliminiramo li iz gornje dvije jednadžbe K_n, dobijemo glavne smjerove.

4° (Glavne) krivulje zakrivljenosti dobit ćemo rješenjem diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}u^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}v^2 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}u^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}v^2 \\ a^2 u^2 + m^2 & 0 & a^2 \\ 0 & -\dfrac{am}{\sqrt{a^2 u^2 + m^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ili:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2 u^2 + m^2}.$$

Rješenje dobijemo separacijom varijabli:

$$\mathrm{d}v = \pm \frac{a\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 u^2 + m^2}}.$$

Krivulje zakrivljenosti, prema tome, glase:

$$v = C \pm \ln (au + \sqrt{a^2 u^2 + m^2}).$$

Do iste diferencijalne jednadžbe doći ćemo iz glavnih smjerova:

$$\mu = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2 u^2 + m^2}$$

stavivši da je $\mu = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$.

S obzirom da je helikoid ploha u kojoj leže glavne normale na zavojnicu valjka (zad. 151) to je helikoid pravčasta ploha.

Helikoid nije razvojna ploha, jer preama 2° Gaussova zakrivljenost nije jednaka nuli (vidi § 9.8. i § 11.1).

321. Naći normalnu, Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe zadane u obliku:

$$z = f(x, y),$$

te provesti diskusiju u vezi s vrstom točaka na plohi.

Kako je prema zad. 214, 270 i 318:

$$E = 1 + p^2, \quad G = 1 + q^2, \quad F = pq, \quad W^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

$$L = \frac{r}{W}, \quad N = \frac{t}{W}, \quad M = \frac{s}{W},$$

to je normalna zakrivljenost:

$$K_n = \frac{r\mu^2 + 2s\mu + t}{W[(1+p^2)\mu^2 + 2pq\mu + (1+q^2)]}, \quad \mu = \frac{dx}{dy}.$$

Potražimo glavne zakrivljenosti pomoću ekstrema funkcije:

$$F(\mu) = [K_n W(1+p^2) - r]\mu^2 + [2pqWK_n - 2s]\mu + \\ + [K_n W(1+q^2) - t] = 0. \tag{1}$$

Imamo:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2[K_n W(1+p^2) - r]\mu + 2[pqWK_n - s] = 0. \tag{2}$$

Eliminiranjem μ iz (1) i (2) dobit ćemo kvadratnu jednadžbu po K_n.

Postupit ćemo ovako: pomnožimo (2) s $\frac{\mu}{2}$ i tako dobivenu jednadžbu oduzmemo od (1). Na taj način umjesto sustava (1) i (2) dobijemo sustav jednadžbi:

$$[K_n W(1+p^2) - r]\mu + [pqWK_n - s] = 0, \tag{2}$$

$$[pqWK_n - s]\mu \quad + [K_n W(1+q^2) - t] = 0. \tag{3}$$

Nuždan i dovoljan uvjet da bi sustav (2) i (3) imao rješenja jest:

$$\begin{vmatrix} K_n W(1+p^2) - r & pqWK_n - s \\ pqWK_n - s & K_n W(1+q^2) - t \end{vmatrix} = 0.$$

Dobijemo:

$$K_n^2[W^2 + W^2p^2 + W^2q^2] - K_n W[(1+p^2)t - 2spq + (1+q^2)r] + rt - s^2 = 0.$$

Glavne zakrivljenosti koje nas posebno ne zanimaju dobivamo, dakle, kao rješenja kvadratne jednadžbe po K_n:

$$K_n^2 - K_n \frac{W}{W^4}[(1+p^2)t - 2spq + (1+q^2)r] + \frac{rt - s^2}{W^4} = 0.$$

Odavde, međutim, po Vietovim formulama možemo direktno očitati Gaussovu zakrivljenost:

$$K = K_1 K_2 = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

i srednju zakrivljenost:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(1+p^2)t - 2spq + (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Vrsta točaka na plohi ovisit će o predznaku Gaussove zakrivljenosti:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{rt - s^2}{W^2}.$$

Kako je $EG - F^2 = W^2 > 0$ to će predznak od K ovisiti o predznaku brojnika $LN - M^2$, odnosno $rt - s^2$.

1. U eliptičkim i kružnim točkama uvijek je $K > 0$, pa se nejednakost $LN - M^2 > 0$ svodi na:

$$rt - s^2 > 0.$$

2. U hiperboličkim točkama plohe je $K < 0$, pa se nejednakost $LN - M^2 < 0$ svodi na

$$rt - s^2 < 0.$$

3. U paraboličkim točkama plohe je $K = 0$, pa se jednakost $LN - M^2 = 0$ svodi na:

$$rt - s^2 = 0.$$

Povežimo ove rezultate s ispitivanjem ekstrema funkcije $z = f(x, y)$. Dovoljan uvjet za ekstrem bio je upravo $rt - s^2 > 0$. Jasno je, dakle, da će ekstremi sigurno postojati u kružnim i eliptičkim stacionarnim točkama, dok za paraboličke točke nema odluke o postojanju ekstrema bez dodatne diskusije, a u hioperboličkim točkama ne postoje ekstremi.

Ovdje je:

$$p = z_x, \quad q = z_y, \quad r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy}.$$

322. Pokazati da je Gaussova zakrivljenost pseudosfere konstantna i negativna. Ispitati vrstu točaka i naći krivulje zakrivljenosti.

Prema zad. 219. jednadžba pseudosfere glasi:

$$y = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}}{\sqrt{x^2 + z^2}} - \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)},$$

Odnosno u vektorskom obliku:

$$\vec{r} = a\cos v \sin u\,\vec{i} - a\left[\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right]\vec{j} + a \sin v \sin u\,\vec{k}.$$

Odavde proizlazi:

$$\vec{r}_u = a\cos v\cos u\,\vec{i} - a\,\frac{\cos^2 u}{\sin u}\,\vec{j} + a\sin v\cos u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_v = -a\sin v\sin u\,\vec{i} + a\cos v\sin u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_{uu} = -a\cos v\sin u\,\vec{i} + a\,\frac{\cos u(1+\sin^2 u)}{\sin^2 u}\,\vec{j} - a\sin v\sin u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_{vv} = -a\cos v\sin u\,\vec{i} - a\sin v\sin u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_{uv} = -a \sin v \cos u \,\vec{i} + a \cos v \cos u \,\vec{k}.$$

Stoga je:

$$E = (\vec{r}_u)^2 = a^2 \cos^2 u (1 + \operatorname{ctg}^2 u) = a^2 \operatorname{ctg}^2 u,$$

$$G = (\vec{r}_v)^2 = a^2 \sin^2 u,$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0,$$

$$W = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{a^4 \cos^2 u} = a^2 \cos u,$$

$$L = \frac{1}{W}(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}) = \frac{a^3 \cos u \sin u}{a^2 \cos u} \begin{vmatrix} \cos v & -\operatorname{ctg} u & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\cos v \sin u & \dfrac{\operatorname{ctg} u (1 + \sin^2 u)}{\sin u} & -\sin v \sin u \end{vmatrix}$$

$$L = a \sin u \operatorname{ctg} u \begin{vmatrix} \cos v & -1 & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\cos v \sin u & \dfrac{1 + \sin^2 u}{\sin u} & -\sin v \sin u \end{vmatrix} =$$

$$= a \cos u \left[\sin^2 v \sin u + \cos^2 v \sin u - \frac{1 + \sin^2 u}{\sin u} \right] =$$

$$= \frac{a \cos u}{\sin u} [\sin^2 u - 1 - \sin^2 u].$$

$$L = -a \operatorname{ctg} u.$$

$$M = \frac{1}{W}(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv}) = \frac{a^3 \cos^2 u \sin u}{a^2 \cos u} \begin{vmatrix} \cos v & -\operatorname{ctg} u & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{vmatrix}$$

$$M = 0.$$

$$N = \frac{1}{W}(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv}) = \frac{a^3 \cos u \sin^2 u}{a^2 \cos u} \begin{vmatrix} \cos v & -\operatorname{ctg} u & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\cos v & 0 & -\sin v \end{vmatrix}$$

$$= a \sin^2 u (\operatorname{ctg} u).$$

$$N = a \sin u \cos u.$$

Tada je normalna zakrivljenost:

$$K_n = \frac{-a \operatorname{ctg} u \,\mu^2 + a \sin u \cos u}{a^2 \operatorname{ctg}^2 u \,\mu^2 + a^2 \sin^2 u}, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}.$$

Glavne zakrivljenosti dobit ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu) = [a K_n \operatorname{ctg}^2 u + \operatorname{ctg} u] \mu^2 + [a K_n \sin^2 u - \sin u \cos u] = 0.$$

Imamo:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2 [a K_n \operatorname{ctg}^2 u + \operatorname{ctg} u] \mu = 0.$$

Ekstremne vrijednosti dobijemo eliminiravši μ iz malo prije dobivenih jednadžbi.

Dobijemo:

$$K_1 = -\frac{\operatorname{tg} u}{a},$$

$$K_2 = \frac{\operatorname{ctg} u}{a}.$$

Gaussova zakrivljenost jest:

$$K = K_1 K_2 = -\frac{\operatorname{tg} u \operatorname{ctg} u}{a^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

Srednja zakrivljenost jest:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} u}{2a}.$$

Gaussova zakrivljenost $K = -\dfrac{1}{a^2}$ je, dakle, konstantna i negativna (vidjeti § 9.7).

S obzirom da je Gaussova zakrivljenost negativna, to se na pseudosferi nalaze same hiperboličke točke.

Zatim, jer je $F = 0$ i $M = 0$, to su koordinatne u i v krivulje ujedno i (glavne) krivulje zakrivljenosti.

Ovo se također vidi i iz jednadžbe (prema (20)):

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}u^2 & -\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \mathrm{d}v^2 \\ a^2 \sin^2 u & 0 & a^2 \operatorname{ctg}^2 u \\ a \sin u \cos u & 0 & -a \operatorname{ctg} u \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,(a^3 \sin^2 u \operatorname{ctg} u + a^3 \sin u \cos u \operatorname{ctg}^2 u) = 0.$$

Odavde je $\mathrm{d}u = 0$ i $\mathrm{d}v = 0$, pa je $u = c_1$ i $v = c_2$, a to su koordinatne krivulje.

323. Naći glavne polumjere zakrivljenosti elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

u točki $(0,\ 0,\ c)$.

Ako uzmemo parametrizaciju

$$\vec{r}=\{a\sin u\cos v,\ b\sin u\sin v,\ c\cos u\}$$

(kao u zadatku 227) onda dobivamo:

$$\vec{r}_u=\{a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ -c\sin u\},$$
$$\vec{r}_v=\{-a\sin u\sin v,\ b\sin u\cos v,\ 0\},$$

pa u točki $T=(0,\ 0,\ c)$ $(u=0,\ v=\text{proizvoljan})$ dobijemo:

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{0},$$

točka T, dakle, nije regularna točka u odnosu na tu parametrizaciju. Radi toga treba uzeti neku drugu parametrizaciju elipsoida i to takvu da je u odnosu na nju točka T regularna. Uzmimo parametrizaciju (vidi zad. 214. i 270):

$$\vec{r}=\{u,\ v,\quad z(u,\ v)\}.$$

Kako je prema zad. 270. i 318:

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2,\quad \text{te}$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

i kako u točki T vrijedi:

$$p=z_u=0,\quad q=z_v=0,\quad r=z_{uu}=-\frac{c}{a^2},$$

$$s=z_{uv}=0,\quad t=z_{vv}=-\frac{c}{b^2},$$

to je u toj točki:

$$E=1,\quad F=0,\quad G=1,\quad L=-\frac{c}{a^2},\quad M=0,\quad N=-\frac{c}{b^2}.$$

Lako se vidi da je u ovoj parametrizaciji točka T regularna.
Normalna zakrivljenost u točki T jest:

$$K_n=\frac{-\frac{c}{a^2}\mu^2-\frac{c}{b^2}}{\mu^2+1}.$$

Glavne zakrivljenosti dobit ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu)=\left(K_n+\frac{c}{a^2}\right)\mu^2+\left(K_n+\frac{c}{b^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\mu}=2\left(K_n+\frac{c}{a^2}\right)\mu=0.$$

Eliminiravši μ dobijemo glavne zakrivljenosti u točki T elipsoida:

$$K_1=-\frac{c}{a^2},\quad K_2=-\frac{c}{b^2},$$

Glavni polumjeri zakrivljenosti prema tome jesu:

$$\left(\frac{1}{K}\right)_1=-\frac{a^2}{c},\quad \left(\frac{1}{K}\right)_2=-\frac{b^2}{c}.$$

Glavne zakrivljenosti dobit ćemo i na drugi način kao rješenja jednadžbe (prema (18)):

$$x^2-2Hx+K=0.$$

Kako je prema (16) i (17):

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{c^2}{a^2b^2},$$

$$H=\frac{EN-2FM+LG}{2(EG-F^2)}=-\frac{c(a^2+b^2)}{2a^2b^2},$$

to je:

$$K_{1,2}=H\pm\sqrt{H^2-K},$$

odnosno:

$$K_{1,2}=-\frac{c(a^2+b^2)}{2a^2b^2}\pm\frac{\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2-4a^2b^2c^2}}{2a^2b^2},$$

pa je na kraju:

$$K_1=-\frac{c}{a^2},\quad K_2=-\frac{c}{b^2}.$$

324. Naći normalnu, glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost rotacione plohe (vidi zad. 215), te (glavne) krivulje zakrivljenosti:

$$x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\sin v,\quad z=g(u).$$

Kako je prema 268. i 319. zadatku:

$$E=f'^2+g'^2,\quad F=0,\quad G=f^2,\quad W^2=f^2(f'^2+g'^2),$$

$$L=\frac{f'g''-f''g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}},\quad M=0,\quad N=\frac{fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}},$$

to je normalna zakrivljenost:

$$K_n = \frac{(f'g''-f''g')\,du^2 + fg'\,dv^2}{\sqrt{f'^2+g'^2}\,[(f'^2+g'^2)\,du^2 + f^2\,dv^2]}.$$

Iz funkcije:

$$F(\mu) = [K_n(f'^2+g'^2)^{3/2} - (f'g''-f''g')]\,\mu^2 + [K_n f^2\sqrt{f'^2+g'^2} - fg' = 0,$$

$$\mu = \frac{du}{dv},$$

dobivamo glavne zakrivljenosti:

$$K_1 = \frac{f'g''-f''g'}{(f'^2+g'^2)^{3/2}}, \quad K_2 = \frac{g'}{f(f'^2+g'^2)^{1/2}},$$

Gaussovu zakrivljenost:

$$K = \frac{g'(f'g''-f''g')}{f(f'^2+g'^2)^2},$$

i srednju zakrivljenost:

$$H = \frac{f(f'g''-f''g') + g'(f'^2+g'^2)}{2f(f'^2+g'^2)}.$$

Budući da je $F=0$ i $M=0$, tada su krivulje zakrivljenosti ujedno i koordinatne $u-$ i $v-$ linije, tj. krivulje zakrivljenosti su paralele i meridijani rotacione plohe.

325. U zavisnosti o realnom parametru m diskutirati vrstu točaka na plohi:

$$z = mxy.$$

Naći drugu diferencijalnu formu te plohe.

Prema zad. 318. i 321. imamo:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}} = 0,$$

$$M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}},$$

$$N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}} = 0,$$

pa je druga diferencijalna forma:

$$\mathrm{II} = \frac{2m\,dx\,dy}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}}.$$

Označimo s $\Delta = LN - M^2$,

pa je:

$$\Delta = -\frac{m^2}{1+m^2x^2+m^2y^2}.$$

Kako je nazivnik uvijek pozitivna veličina, to je:

a) za eliptičke točke:

$$\Delta > 0 \quad \text{odnosno} \quad -m^2 > 0.$$

(Ni za jedno m ploha nema eliptičkih točaka.)

b) za hiperboličke točke:

$$\Delta < 0 \quad \text{odnosno:} \quad -m^2 < 0.$$

Za svaki $m \neq 0$ točke na plohi su hiperboličke. Ploha je hiperbolički paraboloid.

c) za paraboličke točke:

$$\Delta = 0 \quad \text{odnosno} \quad -m^2 = 0.$$

Za $m=0$ (tada ja zadana ploha ravnina), ploha ima sve točke paraboličke.

326. Ispitati oblik plohe:

$$\vec{r} = \{u,\ v,\ u^2+v^2\}, \quad u,\ v \in \mathbf{R}$$

u okolišu točke $O=(0,0,0)$.

Prema zad. 318. i 321. ploha ima jednadžbu:

$$z = x^2 + y^2,$$

pa računajmo koeficijente prve i druge diferencijalne forme:

$$E = 1+p^2, \quad F = pq, \quad G = 1+q^2, \quad W^2 = 1+p+q^2,$$

$$L = \frac{r}{W}, \quad M = \frac{s}{W}, \quad N = \frac{t}{W}.$$

kako je:

$$p = 2x, \quad q = 2y, \quad r = 2, \quad s = 0, \quad t = 2,$$

to je:

$$E = 1+4x^2, \quad F = 4xy, \quad G = 1+4y^2, \quad W^2 = 1+4x^2+4y^2,$$

$$L = \frac{2}{W}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2}{W}.$$

Točka $O=(0,0,0)$ je kružna, jer je ispunjen uvjet:

$$L:M:N = E:F:G.$$

Nadalje odredimo:

$$\Delta = LN - M^2,$$

$$\Delta = \frac{4}{W^2} = \frac{4}{1+4x^2+4y^2}.$$

Ostale točke plohe su eliptičke, jer je uvijek $\Delta > 0$. U okolištu točke $O = (0, 0, 0)$ ploha se nalazi sva s jedne strane tangencijalne ravnine, jer je to svojstvo eliptičke točke. Ploha je kružni paraboloid.

327. Naći asimptotske linije i asimptotske smjerove plohe $z = f(x, y)$, pa zatim dobiveni rezultat primijeniti na plohu:

$$z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Jednadžba asimptotskih linija glasi:

$$L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 = 0,$$

a asimptotskih smjerova:

$$L\mu^2 + 2M\mu + N = 0, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}.$$

Kako je prema zadatku 318. za plohu $z = f(x, y)$:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

to jednadžba asimptotskih linija glasi (njihova projekcija na ravninu XOY):

$$\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{2s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathrm{d}y^2 = 0,$$

odnosno:

$$r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2 = 0.$$

Jednadžba asimptotskih smjerova pak glasi:

$$r\mu^2 + 2s\mu + t = 0, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

Za plohu $z = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ imamo:

$$p = z_x = \frac{x^2-y^2}{x^2y}; \quad q = z_y = \frac{y^2-x^2}{xy^2}; \quad r = z_{xx} = \frac{2y}{x^3};$$

$$s = z_{xy} = \frac{-(x^2+y^2)}{x^2y^2}, \quad t = z_{yy} = \frac{2x}{y^3},$$

pa je jednadžba asimptotskih smjerova:

$$\frac{2y}{x^3}\mu^2 - \frac{2(x^2+y^2)}{x^2y^2}\mu + \frac{2x}{y^3} = 0,$$

odnosno:

$$y^4\mu^2 - xy(x^2+y^2)\mu + x^4 = 0.$$

Asimptotski smjerovi su rješenja gornje kvadratne jednadžbe po μ:

$$\mu_{1,2} = \frac{xy(x^2+y^2) \pm \sqrt{x^2y^2(x^2+y^2)^2 - 4x^4y^4}}{2y^4} = \frac{xy(x^2+y^2) \pm \sqrt{x^2y^2(x^2-y^2)^2}}{2y^4}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{xy[(x^2+y^2) \pm (x^2-y^2)]}{2y^4}.$$

Prvi asimptotski smjer jest:

$$\mu_1 = \frac{xy[(x^2+y^2) + (x^2-y^2)]}{2y^4} = \frac{x^3}{y^3},$$

a drugi:

$$\mu_2 = \frac{xy[(x^2+y^2) - (x^2-y^2)]}{2y^4} = \frac{x}{y}.$$

Asimptotske linije se mogu odrediti iz asimptotskih smjerova stavivši da je $\mu = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

Prva asimptotska linija ima diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x^3}{y^3},$$

odnosno:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{\mathrm{d}y}{y^3}.$$

Prva asimptotska linija pripada familiji krivulja:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = C_1. \tag{1}$$

Dakle, asimptotske linije su presječne krivulje plohe i familije hiperboličkih valjaka (1) kojima su izvodnice paralelne s osi OZ.

Druga asimptotska linija ima diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y},$$

odnosno:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Druga asimptotska linija je familija:

$$y = C_2 x.$$

Dakle, ravnine kroz os OZ sijeku plohu u asimptotskim linijama.

328. Naći asimptotske linije katenoida:

$$x = \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Imamo:

$$\begin{aligned} E &= (\operatorname{sh} u \cos v)^2 + (\operatorname{sh} u \sin v)^2 + (1)^2 = \operatorname{sh}^2 u + 1, \\ G &= (-\operatorname{ch} u \sin v)^2 + (\operatorname{ch} u \cos v)^2 = \operatorname{ch}^2 u, \\ F &= 0, \\ W^2 &= EG - F^2 = \operatorname{ch}^4 u; \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & \operatorname{sh} u \sin v & 1 \\ -\operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{ch} u \cos v & 0 \\ \operatorname{ch} u \cos v & \operatorname{ch} u \sin v & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$M = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & \operatorname{sh} u \sin v & 1 \\ -\operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{ch} u \cos v & 0 \\ -\operatorname{sh} u \sin v & \operatorname{sh} u \cos v & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & \operatorname{sh} u \sin v & 1 \\ -\operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{ch} u \cos v & 0 \\ -\operatorname{ch} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Jednadžba asimptotskih smjerova glasi:

$$L\mu^2 + 2M\mu + N = 0,$$

odnosno:

$$-\mu^2 + 1 = 0,$$

a asimptotski smjerovi jesu:

$$\mu_{1,2} = \pm 1.$$

Asimptotske krivulje dobijemo kao rješenja diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{du}{dv} = \pm 1,$$

$$du = \pm dv,$$

i glase:

$$u + v = c_1,$$
$$u - v = c_2.$$

U zadacima od 329. do 337. naći drugu diferencijalnu formu slijedećih (rotacionih) ploha:

329. $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = c \cos u$, $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$, (rotacionog elipsoida);

330. $x = R \cos v$, $y = R \sin v$, $z = u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (kružni valjak);

331. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = ku$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (kružni stožac);

332. $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \sin v$, $z = c \operatorname{sh} u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (jednoplošni rotacioni hiperboloid);

333. $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \sin v$, $z = c \operatorname{ch} u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (dvoplošni rotacioni hiperboloid);

334. $x = au \cos v$, $y = au \sin v$, $z = u^2$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (rotacioni paraboloid);

335. $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$, $z = b \sin u$, $u, v \in [0, 2\pi]$, (torus);

336. $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u\right)$, $u \in \mathbf{R}_+$, $v \in [0, 2\pi]$, (pseudosfera);

337. $x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v$, $y = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v$, $z = u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (katenoid).

338. Naći drugu diferencijalnu formu helikoida:

$$x = au \cos v, \; y = au \sin v, \; z = bv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

339. Ako je druga kvadratna forma plohe:

$$z = f(x, y)$$

identički jednaka nuli, tada je ploha ravnina ili njen dio. Dokazati.

340. Naći glavne zakrivljenosti, zatim Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$z = xy$$

u točki $M = (1, 1, 1)$.

341. Naći normalnu, glavne zakrivljenosti, Gaussovu zakrivljenost i srednju zakrivljenost sfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Dokazati da je Gaussova zakrivljenost sfere konstantna i pozitivna.

342. Naći glavne polumjere zakrivljenosti plohe:

$$e^z \cos x = \cos y$$

u točki $T = (0, 0, z)$.

342. Naći glavne zakrivljenosti plohe (eliptičkog paraboloida):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

u točki $T = (0, 0, 0)$ (vidi zad. 372).

344. Naći glavne polumjere zakrivljenosti i glavne smjerove plohe:

$$\vec{r} = \{x, y, xy\}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

345. Naći glavne zakrivljenosti rotacionog paraboloida:

$$z = a(x^2 + y^2)$$

u točki $(0, 0, 0)$.

346. Naći Gaussovu i srednju zakrivljenost hiperboličkog paraboloida:

$$z = axy$$

u točki $x = y = 0$.

347. Pokazati da je srednja zakrivljenost helikoida:

$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = cv$ jednaka nuli.

348. Pokazati da je srednja zakrivljenost katenoida:

$$z = a \operatorname{ar\,ch} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}$$

jednaka nuli.

349. Naći srednju i Gaussovu zakrivljenost plohe:

$$z = \frac{1}{a} \ln \frac{\cos ax}{\cos ay}$$

u točki $x = y = 0$.

350. Naći Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$\vec{r} = \{u, v, auv\}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

351. Naći Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$\vec{r} = \left\{u, v, \frac{u-v}{u+v}\right\}, \quad u, v \in \mathbf{R}, \quad u + v \neq 0,$$

u točki $(1, 1)$.

352. Odrediti Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$\vec{r} = \{a(u+v), \quad b(u-v), \quad uv\}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

353. Naći glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te glavne smjerove rotacionog stošca:

$$x^2 + y^2 = az^2.$$

354. Naći normalnu, glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te krivulje zakrivljenosti rotacionog elipsoida:

$$\vec{r} = \{a\sin u\cos v, \quad a\sin u\sin v, \quad b\cos u\}.$$

355. Naći normalnu, glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te krivulje zakrivljenosti plohe:

$$x = e^{-u}\cos v, \quad y = e^{-u}\sin v, \quad z = \ln(e^u + \sqrt{e^{2u} - 1}) - \sqrt{1 - e^{-2u}}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

356. Naći glavne, srednju i Gaussovu zakrivljenost plohe, koja nastaje rotacijom pravca p oko osi OZ, ako pravac p s osi OZ zatvara kut θ.

357. Odrediti nepoznate funkcije f i q tako da rotacione plohe

1° $x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u), \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$,

2° $\vec{r} = \{u\cos v, \quad u\sin v, \quad g(u)\}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$,

3° $\vec{r} = f(u)\vec{e}(v) + u\vec{k}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$

budu minimalne.

358. Naći takve funkcije f i g da ploha:

$\vec{r} = \{f(u)\cos v, \quad f(u)\sin v, \quad g(v)\}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$,

bude minimalna.

359. Naći Gaussovu zakrivljenost ploha zadanih u zadacima od 329. do 337.

360. Pokazati da je u svakoj točki plohe:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \lambda u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$$

jedna od glavnih krivulja zakrivljenosti pravac.

U zadacima od 361. do 366. naći krivulje zakrivljenosti na sljedećim plohama:

361. hiperboličkom paraboloidu: $z = axy$;

362. rotacionoj plohi: $x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, \quad z = \phi(u), u \in \mathbf{R}, v \in [0, 2\pi]$;

363. kružnom valjku: $x = R\cos v, \quad y = R\sin v, \quad z = u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$;

364. kružnom stošcu: $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = ku, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$;

365. na plohi:

$$\vec{r} = \{u^2 + v^2, \quad u^2 - v^2, \quad v\}, \quad u, v \in \mathbf{R};$$

366. kružnom paraboloidu:

$$\vec{r} = \{u,\ v,\ u^2 + v^2\}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

367. Na ravnini i na sferi svaka krivulja jest krivulja zakrivljenosti. Dokazati.

368. Pokazati da je na ravnini i sferi svaki smjer ujedno i glavni smjer.

369. Dokazati da su koordinatne krivulje plohe ujedno i krivulje zakrivljenosti tada i samo tada kad je

$$F = 0 \quad \text{i} \quad M = 0.$$

370. Pokazati da su koordinatne krivulje plohe:

$$\vec{r} = \{3u - u^3 + 3uv^2,\ \ v^3 - 3u^2v - 3v,\ \ 3u^2 - 3v^2,\}, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

ujedno krivulje zakrivljenosti.

Naći koeficijente prve i druge diferencijalne forme.

371. Naći krivulje zakrivljenosti elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

372. Naći prvu i drugu diferencijalnu formu, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te krivulje zakrivljenosti eliptičkog paraboloida:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{(vidi zad. 282, 334. i 424).}$$

Naći asimptotske linije ploha zadanih u zadacima od 373. do 385.

373. hiperboličkog paraboloida $z = axy$,

374. $\vec{r} = \{v\cos u - \sin u,\ \ v\sin u + \cos u,\ \ u\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$

375. $\vec{r} = \{3u + 3v,\ \ 3u^2 + 3v^2,\ \ 2u^3 + 2v^3\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$

376. $\vec{r} = \{u\cos v,\ \ u\sin v,\ \ \sqrt{2}u\}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$

377. $\vec{r} = \{(1+u)\operatorname{ch} v,\ \ (1-u)\operatorname{sh} v,\ \ u\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$

378. pseudosfere:

$$\vec{r} = \left\{a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ a\left(\cos u + \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)\right\},$$

$u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi],$

379. $\vec{r} = \left\{u^2 + v,\ \ u^3 + uv,\ \ u^4 + \dfrac{2}{3}u^2 v\right\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$

380. rotacione plohe:

a) $x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u), \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$

b) $\vec{r} = t\cos\varphi\,\vec{i} + t\sin\varphi\,\vec{j} + \ln t\,\vec{k}, \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi],$

381. $\vec{r} = \{u, uv, f(v)\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$

382. hiperboličkog paraboloida:

$$\vec{r} = \left\{au\operatorname{ch} v, \quad y = bu\operatorname{sh} v, \quad z = \frac{1}{2}u^2\right\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

383. jednoplošnog (rotacionog) hiperboloida:

$x = a\operatorname{ch} u\cos v, \quad y = a\operatorname{ch} u\sin v, \quad z = c\operatorname{sh} u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$

384. torusa:

$x = (a + b\cos u)\cos v, \quad y = (a + b\cos u)\sin v, \quad z = b\sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi],$

385. $z = x\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$

386. Pokazati da na helikoidu:

$$x = au\cos v, \quad y = au\sin v, \quad z = bv, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

jedna porodica asimptotskih krivulja jesu pravci, a druga zavojne krivulje.

387. Dokazati da bi koordinatne krivulje plohe bile ujedno i asimptotske linije nužno je i dovoljno da je $N = 0$ i $L = 0$.

388. Dokazati da je asimptotska mreža krivulja na plohi S ortogonalna, ako je srednja zakrivljenost od S jednaka nuli.

389. Naći projekcije na ravnini XOY asimptotskih linija plohe:

$$\vec{r} = \{u,\ v,\ u^m v^n\}, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

390. Zadana je krivulja:

$$\vec{r} = \{a\operatorname{ch} t\cos t,\ a\operatorname{ch} t\sin t, at\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pokazati da ova krivulja leži na plohi

$x^2 + y^2 = a^2\operatorname{ch}^2\dfrac{z}{a}$ (katenoid) i da je asimptotska linija te plohe.

391. Zadana je ploha S:

$$\vec{r} = \left\{\sqrt{u}\cos v,\ \ \sqrt{u}\sin v,\ \frac{1}{u}\right\}, \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi]:$$

1° Napisati jednadžbu ove plohe u obliku $z = f(x, y)$.

2° Pokazati da je mreža koordinatnih krivulja od S ortogonalna.

3° Odrediti asimptotske linije plohe S.

392. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \left\{u + \frac{v}{u},\ \ u - \frac{v}{u},\ \ uf(v)\right\}, \quad u \in \mathbf{R}\setminus 0, \quad v \in \mathbf{R},$$

f barem dvaput diferencijabilna funkcija.

1° Odrediti funkciju $f(v)$ tako da koordinatne linije $u = \text{const.}$ budu istovremeno i asimptotske linije plohe (uz uvjet $v = 1$, $f(v) = 1$).

2° Pokazati da je torzija asimptotskih linija nula.

393. Zadana je ploha S:

$$\vec{r} = \left\{ \frac{a}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right) \cos u; \ \ \frac{b}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right) \sin u; \ \ \frac{c}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right) \right\},$$

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbf{R} \setminus 0.$$

1° Napisati jednadžbu plohe S u obliku $F(x, y, z) = 0$.

2° Kakva veza mora postojati između konstanti a i b da bi mreža koordinatnih krivulja plohe S bila ortogonalna?

3° Odrediti asimptotske linije ove plohe.

394. Naći eliptičke, paraboličke i hiperboličke točke na torusu:

$$x = (a + b\cos u)\cos v, \quad y = (a + b\cos u)\sin v, \quad z = b \sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi].$$

U zadacima od 395. do 403. ispitati vrstu točaka na sljedećim plohama drugog reda:

395. elipsoidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$,

396. jednoplošnom hiperboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (vidi zad. 229),

397. dvoplošnom hiperboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (vidi zad. 230),

398. eliptičkom paraboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ (vidi zad. 228),

399. hiperboličkom paraboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ (vidi zad. 233),

400. stošcu: $x^2 + y^2 = z^2$ (vidi zad. 232),

401. eliptičkom valjku: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (vidi zad. 231),

402. paraboličkom valjku: $x^2 = 2pz$,

403. hiperboličkom valjku: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$.

404. Ispitati vrstu točaka na katenoidu:

$$x = a \operatorname{ch}\frac{u}{a} \cos v, \quad y = a \operatorname{ch}\frac{u}{a} \sin v, \quad z = u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

U zadacima od 405. do 407. ispitati vrstu točaka na plohama koje nastaju rotacijom sljedećih krivulja:

405. sinusoide $y = \sin x$, $z = 0$, oko osi OX,

406. krivulje $y = \ln x$, $z = 0$, oko osi OX,

407. krivulje $y = \ln x$, $z = 0$, oko osi OY.

408. Sinusoida $y = \sin x$, $z = 0$, rotira oko osi OX. Naći na rotacionoj plohi kružne točke.

409. Naći kružne točke rotacionog elipsoida:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = c \cos u, \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

410. Naći kružne točke rotacionog paraboloida:

$$x = a u \cos v, \quad y = a u \sin v, \quad z = u^2, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

411. Naći uvjet za kružne točke plohe:

$$z = f(x, y).$$

412. Naći kružne točke eliptičkog paraboloida:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, \quad q > 0).$$

413. Naći kružne točke na elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

414. Naći geometrijsko mjesto paraboličkih točaka na plohi:

$$x = u + v, \quad y = uv, \quad z = u^3 + v^3, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

415. Dokazati da su sve točke plohe:

$$x + y = z^3$$

paraboličke.

416. Pokazati da su kružne točke karakterizirane jednakosti:

$$H^2 = K.$$

417. Naći kružne točke plohe:

$$xyz = a^3.$$

418. Zadana je ploha:

$$z = 2x^2 + \frac{9}{2} y.$$

1° Naći u ishodištu koordinatnog sustava jednadžbu Dupinove indikatrise.

2° Izračunati u ishodištu koordinatnog sustava radius zakrivljenosti normalnog presjeka čija tangenta zaklapa s osi OX kut od 45°.

419. U ishodištu koordinatnog sustava naći jednadžbu Dupinove indikatrise na plohu:

$$\vec{r} = \{u,\ v,\ u^2 - v^2\}, \quad u, v \in \mathbf{R}^2.$$

Rješenja

329. $\mathrm{II} = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 u + c^2 \sin^2 u}}\,(\mathrm{d}u^2 + \sin^2 u\,\mathrm{d}v^2).$

330. $\mathrm{II} = R\,\mathrm{d}v^2.$

331. $\mathrm{II} = \dfrac{ku}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathrm{d}v^2.$

332. $\mathrm{II} = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2 u + c^2\,\mathrm{ch}^2 u}}\,(-\mathrm{d}u^2 + \mathrm{ch}^2 u\,\mathrm{d}v^2).$

333. $\mathrm{II} = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2\,\mathrm{ch}^2 u + c^2\,\mathrm{sh}^2 u}}\,(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{sh}^2 u\,\mathrm{d}v^2).$

334. $\mathrm{II} = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2 + 4u^2}}\,(\mathrm{d}u^2 + u^2\,\mathrm{d}v^2).$

335. $\mathrm{II} = b\,\mathrm{d}u^2 + \cos u\,(a + b\cos u)\,\mathrm{d}v^2.$

336. $\mathrm{II} = a(-\mathrm{ctg}\,u\,\mathrm{d}u^2 + \sin u \cos u\,\mathrm{d}v^2).$

337. $\mathrm{II} = a\,\mathrm{d}v^2 - \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}u^2.$

338. $\mathrm{II} = -\dfrac{2ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{a^2u^2 + b^2}}.$

339. Prema zad. 318. $\mathrm{II} = \dfrac{f_{xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2f_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f_{yy}\,\mathrm{d}y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$

Iz uvjeta zadatka je: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Opće rješenje ovog sustava je: $f = ax + by + c$.

340. $K_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9},\quad K_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3};\quad K = -\dfrac{1}{9},\quad H = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}.$

341. $K_n = -\dfrac{1}{R};\quad K_1 = -\dfrac{1}{R},\quad K_2 = -\dfrac{1}{R};\quad K = \dfrac{1}{R^2},\quad H = -\dfrac{1}{R}.$

(Gaussova zakrivljenost je konstantna i pozitivna.)

342. $\dfrac{1}{K_1} = -1,\quad \dfrac{1}{K_2} = -1.$

343. $K_1 = \dfrac{1}{p},\quad K_2 = \dfrac{1}{q}.$

344. $\dfrac{1}{K_1} = [-xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]\,\sqrt{1 + x^2 + y^2},$

$\dfrac{1}{K_2} = [-xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]\,\sqrt{1 + x^2 + y^2},$

$\mu_1 = \dfrac{1+x^2}{1+y^2},\quad \mu_2 = -\dfrac{1+x^2}{1+y^2}.$

345. $K_1 = 2a,\quad K_2 = 2a.$

346. $K = -a^2,\quad H = 0.$

349. $K = \dfrac{-a^2\cos^{-2}ax\,\cos^{-2}ay}{(1 + \mathrm{tg}^2 ax + \mathrm{tg}^2 ay)^2},\quad K_T = -1,\quad H = 0,\quad H_T = 0.$

350. $K = \dfrac{-a^2}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^2},\quad H = -\dfrac{a^3uv}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}}.$

351. $K = -\dfrac{1}{9},\quad H = 0.$

352. $K = -\dfrac{4a^2b^2}{g^2},\quad H = \dfrac{4ab}{\sqrt{g^3}}\,(a^2 - b^2 + uv)$, gdje je

$g = 4a^2b^2 + a^2(u-v)^2 + b^2(u+v)^2.$

353. Rotacionu plohu parametrizirati ovako:

$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\,u,\quad u \in \mathbf{R},\quad v \in [0, 2\pi]$. Zatim prema zad. 324.: $K_1 = 0$,

$K_2 = \dfrac{1}{z\sqrt{a^2 + a}},\quad K = 0,\quad H = \dfrac{1}{2z\sqrt{a^2 + a}},$

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, pa su glavni pravci: $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

354. $K_n = \dfrac{-ab\,(\mathrm{d}u^2 + \sin^2 u\,\mathrm{d}v^2)}{\sqrt{E}\,(E\mathrm{d}u^2 + a^2\sin^2 u\,\mathrm{d}v^2)};\quad K_1 = \dfrac{-ab}{E\sqrt{E}},\quad K_2 = \dfrac{-b}{a\sqrt{E}},$

$K = \left(\dfrac{b}{E}\right)^2,\quad H = -\dfrac{a^2b + bE}{2aE\sqrt{E}}$, gdje je $E = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u$; jer je $F = 0$, $M = 0$, to su krivulje zakrivljenosti ujedno parametarske krivulje, tj. $u = \text{const.}$ – paralele i $v = \text{const.}$ – meridijani elipsoida.

355. $K_n = \dfrac{-e^{-2u}\mathrm{d}u^2 + (e^{2u} - 1)\,\mathrm{d}v^2}{\sqrt{e^{2u} - 1}\,(e^{2u}\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)};\quad K_1 = \sqrt{e^{2u} - 1},\quad K_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{e^{2u} - 1}},$

$K = -1,\quad H = \dfrac{e^{2u} - 2}{2\sqrt{e^{2u} - 1}}$; jer je $F = 0$, $M = 0$ krivulje zakrivljenosti su parametarske krivulje ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$), ploha se sastoji od hiperboličkih točaka.

356. Stavimo li $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, a udaljenost neke točke M pravca p od sjecišta s osi OZ sa »a«, tada je $z = a\cos\theta$, no izlazi $a = \dfrac{u}{\sin\theta}$, pa je: $\vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ u\,\mathrm{ctg}\,\theta\}$; $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$;

$K_1 = 0,\quad K_2 = \dfrac{\cos\theta}{u};\quad K = 0,\quad H = \dfrac{\cos\theta}{2u}.$

357 1° Prema zad. 324. mora biti srednja zakrivljenost jednaka nuli. Dolazimo time do diferencijalne jednadžbe:

$$f(f'g''-f''g')+g'(f'^2+g'^2)=0.$$

Podijelivši ovu jednadžbu s g'^2 možemo je napisati u obliku:

$$f=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{f'}{g'}\right)}{\mathrm{d}u}=\frac{f'}{g'}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}.$$

Uzmimo supstituciju:

$$\frac{f'}{g'}=t;\quad f'=tg,\quad \mathrm{d}f=t\mathrm{d}g.$$

Jednadžba tada glasi:

$$f\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}f.$$

Separacijom varijabli dolazimo do rješenja:

$$t=\frac{\pm\sqrt{f^2-c_1^2}}{c_1}.$$

Treba još riješiti (separacijom varijabli) ovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{f'}{g'}=\frac{\pm\sqrt{f^2-c_1^2}}{c_1},\quad\text{odnosno}\quad \mathrm{d}g=\pm\frac{c_1\,\mathrm{d}f}{\sqrt{f^2-c_1^2}}.$$

Rješenje glasi:

$$g=\pm c_1\,\mathrm{ar\,ch}\frac{f}{c_1}+c_2.$$

Traženo rješenje predstavlja familiju rotacionih ploha:

$$x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\sin v,\quad z=\pm c_1\,\mathrm{ar\,ch}\frac{f(u)}{c_1}+c_2,\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi].$$

Usporedivši to sa zad. 221. a) plohu možemo napisati i pomoću funkcije g, uzmemo li da je $f(u)$ izraženo eksplicite pomoću g:

$$f=c_1\,\mathrm{ch}\frac{\bar{c}_2\pm g}{c_1},$$

$$x=c_1\,\mathrm{ch}\frac{\bar{c}_2\pm g}{c_1}\cos v,\quad y=c_1\,\mathrm{ch}\frac{\bar{c}_2\pm g}{c_1}\sin v;\quad z=g(u),\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi].$$

2° Treba staviti $f(u)=u$; rješenje diferencijalne jednadžbe: $ug''+g'(1+g'^2)=0$ jest: $g=\pm c_1\,\mathrm{arch}\frac{u}{c_1}+c_2$. Ploha je katenoid:

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=\pm c_1\,\mathrm{arch}\frac{u}{c_1}+c_2,\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,\pi].$$

3° Treba staviti $g(u)=u$; rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$1+f'^2-ff''=0\quad\text{jest:}\quad f=c_1\,\mathrm{ch}\frac{c_2\pm u}{c_1}.$$

Ploha je također katenoid:

$$x=c_1\,\mathrm{ch}\frac{c_2\pm u}{c_1}\cos v,\quad y=c_1\,\mathrm{ch}\frac{c_2\pm u}{c_1}\sin v,\quad z=u,\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi].$$

358. $E=f'^2,\quad G=f'^2+g'^2,\quad F=0,\quad L=0,\quad M=-\dfrac{fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}},$

$$N=\frac{fg''}{\sqrt{f'^2+g'^2}}.\quad H=0\ \text{za}\ EN-2FM+LG=0.$$

Jer je $F=0$, $L=0$, mora biti $N=0$. To nam daje diferencijalnu jednadžbu: $g''=0\,(f\neq 0)$. Rješenje jest: $g=c_1v+c_2$. Za $f(u)=c$ u ploha je helikoid.

359. 1. Za rotacioni elipsoid: $K=-\dfrac{c^2}{(a^2\cos^2u+c^2\sin^2u)^2}$;

2. Za kružni valjak: $K=0$; 3. Za kružni stožac: $K=0$;

4. Za jednoplošni rotacioni hiperboloid:

$$K=-\frac{c^2}{(a^2\,\mathrm{sh}^2u+c^2\,\mathrm{ch}^2u)^2};$$

5. Za dvoplošni rotacioni hiperboloid:

$$K=\frac{c^2}{(a^2\,\mathrm{ch}^2u+c^2\,\mathrm{sh}^2u)^2};$$

6. Za rotacioni paraboloid: $K=\dfrac{4}{(a^2+4u^2)^2}$;

7. Za tours: $K=\dfrac{\cos u}{b(a+b\cos u)}$;

8. Za pseudosferu: $K=-\dfrac{1}{a^2}$; 9) Za katenoid: $K=-\dfrac{1}{a^2\,\mathrm{ch}^4\frac{u}{a}}$.

361. Diferencijalna jednadžba krivulje zakrivljenosti za plohu $z=f(x,y)$ glasi:

$$\begin{vmatrix}\mathrm{d}y^2 & -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \mathrm{d}x^2\\ 1+q^2 & pq & 1+p^2\\ t & s & r\end{vmatrix}=0,$$

pa je:

$$\ln(ay+\sqrt{1+a^2y^2})\pm\ln(ax+\sqrt{1+a^2x^2})=\text{const.}$$

362. Meridijani i paralele ($u=c_1$, $v=c_2$).

363. Koordinatne krivulje (paralele i meridijani, koji su izvodnice valjka).

364. Koordinatne krivulje (izvodnice stošca i njihove ortogonalne trajektorije).

365. Koordinatne krivulje.

366. $y=c_1x;\quad x^2+y^2=c_2.$

367. Najprije, prema zad. 317. i 341. zaključujemo da je u svakoj točki ravnine i sfere svaki smjer μ ujedno i glavni smjer, jer je jednadžba glavnih smjerova (12):

$$\begin{vmatrix}\mu^2 & -\mu^2 & 1\\ G & F & E\\ N & M & L\end{vmatrix}=0$$

identički zadovoljena, tj. identički je jednaka nuli. Nadalje, kako je (glavna) krivulja zakrivljenosti takva krivulja, kod koje je tangenta paralelna s jednim od dva glavna smjera μ_1 i μ_2, to izlazi da je krivulja zakrivljenosti sfere i ravnine paralelna sa svakim smjerom, odnosno svaka krivulja ravnine i sfere je ujedno i krivulja zakrivljenosti.

368. Vidjeti prvi dio zad. 367.

370. $E=G=9\,(1+u^2+v^2)^2$; $L=-N=-6$, $F=M=0$.

371. Naći p, q, r, s, t, pa su krivulje zakrivljenosti dane jednadžbom:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}x^2 & -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \mathrm{d}y^2 \\ \dfrac{b^4 z^2 + c^4 y^2}{b^4} & \dfrac{c^4 xy}{a^2 b^2} & \dfrac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4} \\ a^2 - x^2 & xy & b^2 - y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Razriješimo li determinantu, stavimo umjesto z vrijednosti iz jednadžbe elipsoida, pa nakon skraćivanja jednadžbe $s(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)$ i uz oznake: $\alpha = b^2 - c^2$, $\beta = c^2 - a^2$, $\gamma = a^2 - b^2$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu za krivulje zakrivljenosti:

$$b^2\beta xydx^2 - (b^2\beta x^2 + a^2\alpha y^2 + a^2b^2\gamma)\,dxdy + a^2\alpha xydy^2 = 0.$$

(Ovu diferencijalnu jednadžbu prvi je riješio Monge.)

372. $\mathrm{d}s^2 = \left(1+\dfrac{x^2}{p^2}\right)\mathrm{d}x^2 + \dfrac{2xy}{pq}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \left(1+\dfrac{y^2}{q^2}\right)\mathrm{d}y^2$;

$$\mathrm{II} = \frac{1}{pq\sqrt{1+\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}}}\,[q\,\mathrm{d}x^2 + p\,\mathrm{d}y^2];$$

$$K = \frac{1}{pq\left(1+\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}\right)^2}\;;\quad H = \frac{p+q+\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}}{2pq\left(1+\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}\right)^{3/2}}\;;$$

krivulje zakrivljenosti dobijemo kao rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$qxy\,\mathrm{d}x^2 + [pq(q-p) + py^2 - qx^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - pxy\,\mathrm{d}y^2 = 0.$$

373. $x=c_1$, $y=c_2$ (koordinatne krivulje).

374. $u=c_1$, $u-2v=c_2$.

375. $u+v=c_1$, $u-v=c_2$.

376. $u = c_1 e^{v\sqrt{2}}$; $u = c_2 e^{-u\sqrt{2}}$.

379. $v = c$, $u = \dfrac{c\sqrt{\operatorname{ch} v} - \sqrt{\operatorname{sh} v}}{c\sqrt{\operatorname{ch} v} - \sqrt{\operatorname{sh} v}}$.

378. $v = c_1 + \ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}$, $v = c_2 - \ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}$.

379. $u=c_2$; druga asimptotska linija ima implicitnu jednadžbu:

$u(u^2+v)^2 - c_2^2v^2 = 0$, a dobije se kao rješenje Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe:

$$2u^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} - 5u^2v - v^2 = 0.$$

380. a) diferencijalna jednadžba asimptotskih krivulja rotacione plohe glasi: $(f'g'' - f''g')\,\mu^2 + fg' = 0$;